Das Lorenz-System

Keszeg Attila

2015.06.19.

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \tag{1}$$

$$\dot{y} = rx - y - xz \tag{2}$$

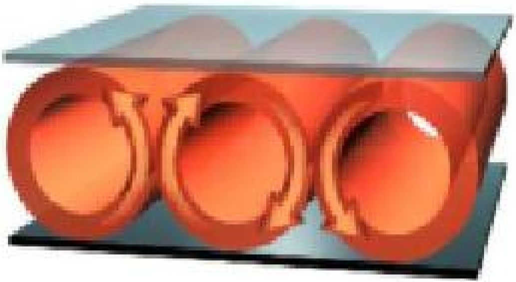
$$\dot{z} = xy - bz \tag{3}$$

[1]

[1] $\sigma, r, b > 0$

Bedeutung der Parameter

1. $\sigma =$ Prandtl-Zahl $\rightarrow$ Maß für die Trägheit eines hydrodynamischen Systems
2. $b = \frac{4}{1+a^2}$ ist ein Maß für die Zellgeometrie *(a =Zellhöhe)*
3. $r =$ Rayleighzahl $\rightarrow$ setzt die auftreibenden und bremsenden Kräfte in Verhältnis



Herleitung in Stichworten

1. Das Dichtefeld, den Druck, die Temperatur und die geschwindigkeitsverteilung fassen wir als kontinuierliche Größen auf
2. Physikalische Grundgleichungen:
   † Massenerhaltung: Kontinuitätsgleichung
   † Impulserhaltung: Navier-Stokes-Gleichung
   † Energieerhaltung: Wärmetransportgleichung
3. Benard Konventnion
4. Zweifache Fourierreihenentwicklung
5. Numerische Integration

Anwendungsfälle

1. Geodynamik
2. Konvektionsvorgänge in der Atmosphäre und in den Ozeanen
3. Energietransport in der Sonne
4. Konvektive Zonen im Inneren eines Sterns
5. Geomagnetismus

Symmetrie

1. $$\sigma(y-x) \to \sigma(-y--x) = \sigma(-y+x) \tag{4}$$
2. $$rx - y - xz \to \ -rx + y + xz \tag{5}$$
3. $$xy - bz \to xy - bz \tag{6}$$

Für die Lösung $(x(t), y(t), z(t))$ des Systems, finden wir also das symmetrische Partner $(-x(t), -y(t), z(t))$

z-Achse

Für $x = y = 0$ ist $\dot{x} = \sigma(y - x) = 0$ und $\dot{y} = rx - y - xz = 0 \rightarrow$ z-Achse ist invariant

Für $t \rightarrow \infty$ verlaufen alle Trajektorien auf der z-Achse gegen den Ursprung *(Beweis folgt im nächsten Abschnitt)*

Nichtlinearität

2 Nichtlinearitäten $\rightarrow$ xy und xz

Es ist offensichtlich, dass der Ursprung $O = (0; 0; 0)$ ist ein Fixpunkt. Nun untersuchen wir das System und versuchen alle Gleichgewichtspunkte zu ermitteln:

$$0 = \sigma(y - x) \tag{7}$$

$$0 = x - y \Rightarrow x = y \tag{8}$$

Jetzt betrachten wir die Gleichung (2)

$$0 = rx - y - xz \tag{9}$$

Wir wissen, dass $x = y \Rightarrow$ Wir können die Gleichung in folgender Form schreiben:

$$0 = rx - x - xz \Rightarrow x(r - 1 - z) \tag{10}$$

$$0 = r - 1 - z \Rightarrow z = r - 1 \tag{11}$$

Nun betrachten wir die Gleichung (3)

$$0 = xy - bz \tag{12}$$

Wegen (8) und (11) gilt:

$$0 = x^2 - b(r-1) \Rightarrow x = \pm\sqrt{b(r-1)} \tag{13}$$

Analog erhält man y:

$$y = \pm\sqrt{b(r-1)} \tag{14}$$

Das System hat also folgende Fixpunkte:

$$Q^{+} = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \tag{15}$$

$$Q^{-} = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)^{2} \tag{16}$$

$$O = (0,0,0) \tag{17}$$

[2] $Q^{+} und Q^{-}$ *existieren nur für* $r > 1$

Wir linearisieren das System (1)-(3) im Ursprung, und erhalten folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix}$$

Um die Eigenwerte von A zu berechnen, bilden wir das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ von A:

$$p(\lambda) = det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma \\ r & -1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und erhalten dadurch die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ von A:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}((\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}) \qquad (18)$$

Proposition

Für $r < 1$ tendieren die Lösungen des Lorenz-Systems gegen dem Gleichgewichtspunkt im Ursprung

Lyapunov Funktion

Wir betrachten das System $\dot{x} = f(x)$,wo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und x^* ein Gleichgewichtspunkt von $f(x)$ (falls $f(x^*) = 0$) ist.Eine Lyapunov Funktion (*stetig differenzierbar, reellwertig*) V(x) hat folgende Eigenschaften:

$$V(x) > 0 \text{ für alle } x \neq x^* \text{ und } V(x^*) = 0 \text{ (pos. definit)}$$
$$\dot{V} < 0 \text{ für alle } x \neq x^*$$

Beweis:

Im ersten Schritt konstruieren wir eine Lyapunov Funktion:

$$L(x, y, z,) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2 \tag{19}$$

Wir bilden nur $\dot{L}$:

$$\dot{L} = 2x\dot{x} + 2\sigma\dot{y} + 2\sigma\dot{z} \tag{20}$$

$$\dot{L} = -2\sigma(x^2 + y^2 - xy(r+1)) - 2\sigma(bz^2) \tag{21}$$

Wir definieren die Funktion $g(x, y)$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - xy(r+1) \tag{22}$$

Klarerweise gilt: $g(x, y) = x^2 + y^2 - xy(r+1) > 0$ für alle Punkte $(x, y) \neq 0$, das heißt, entlang der y-Achse ist die Aussage richtig. Der Beweis geht für andere Geraden der Form $y = kx$ analog. $\square$

Proposition

Die Gleichgewichtspunkte $Q_{\pm}$ verlieren ihre Stabilität in $r*$, vorausgesetzt dass,

$$1 < r < r^{*} = \sigma\left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}\right) \tag{23}$$

Beweis

Durch Linearisierung des Systems (13)-(15) erhalten wir die Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ (r-z) & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist:

$$p_r(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2(1+b+\sigma) - 2b\sigma(r-1) - b\lambda(r+\sigma) \tag{24}$$

Von B berechnen wir die Eigenwerte:

$$\lambda_1 = \frac{-(1+b+\sigma)+(1-b+\sigma)}{2} = \frac{-2b}{2} = -b \tag{25}$$

$$\lambda_2 = \frac{-(1+b+\sigma)-(1-b+\sigma)}{2} = \frac{-2\sigma-2}{2} = -\sigma-1 \tag{26}$$

$$\lambda_3 = 0 \tag{27}$$

Beweis (Fortsetzung)

$p_1(\lambda)$ hat eindeutinge Nullstellen in $\lambda_1 = -b$, $\lambda_2 = -\sigma - 1$, $\lambda_3 = 0$

$$\Rightarrow$$

$$\sigma > b + 1 \Rightarrow -\sigma < -b - 1 \Rightarrow -\sigma + 1 < -b$$

$$\Rightarrow$$

$$-\sigma - 1 < -\sigma + 1 < -b < 0$$

Es stellt sich die Frage, ob es einenWert für r gibt, für den die Ruhelagen $Q_\pm$ nicht mehr stabil sind $\rightarrow$ Für welchen Wert von r ist ein Eigenwert rein imaginär?

Proposition

Es existiert ein v^*, sodass alle Lösungen, die außerhalb des Ellipsoids $V = v^*$ starten in dieses eintreten und nicht mehr verlassen.

$$divF = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(X) \tag{28}$$

$$\frac{dV}{dt} = \int_{G(t)} divFdxdydz \tag{29}$$

$$divL = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma(y-x)) + \frac{\partial}{\partial y}(rx - y - xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy - bz) = -\sigma - 1 - b \tag{30}$$

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \int_{G(t)} (divL)dxdydz = \int_{G(t)} (-\sigma-1-b)dV = -(\sigma+1+b)V \tag{31}$$

$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t} \tag{32}$$

$\Rightarrow$Dissipation

Chaos

Definition

Ein chaotisches System ist ein deterministisches System mit aperiodischem Langzeitverhalten und empfindlicher Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Definition

Eine geschlossene Menge Λ heißt Attraktor, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Λ ist transitiv
2. Λ ist invariant
3. Λ ist minimal

Beispiel

Das Planar-System

$$\dot{x} = x - x^3 \tag{33}$$

$$\dot{y} = -y \tag{34}$$

ist invariant und transitiv,es erfüllt die Minimalitätsbedingung jedoch nicht $\rightarrow$ kein Attraktor.

Definition

Eine geschlossene Menge Λ heißt seltsamer Attraktor, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Λ ist transitiv
2. Λ ist invariant
3. Λ ist minimal
4. Λ weist empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen auf