Keszeg Attila

Einstieg in die Mathematik

24. Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zahlen und Rechenoperationen

1.1 Zahlenbereiche

Die Aufgabe dieses ersten Kapitels besteht darin unsere Grundkentnisse aus der Volksschule zu wiederholen .

In diesem Abschnitt wollen wir einen Überblick über die, für uns relevanten Zahlenmengen geben.

1.1.1 Natürliche Zahlen

> “ Die natürlichen Zahlen hat uns Gott gegeben, alles andere ist Menschenwerk. ”
>
> *Leopold Kronecker*

Symbol: $\mathbb{N}$

Verwendung:

1. Zählen von Gegenständen
2. Festlegen von Reihenfolgen
3. Rundungen
4. Anzahlen (Einwohnerzahl der Stadt Sopron)

Unsere Vorstellungen über Zahlen reichen bis in die Steinzeit (Paläolitikum) zurück. Bereits die Menschen von damals haben Zahlen verwendet, um ihr alltägliches Leben besser zu organisieren. Die-

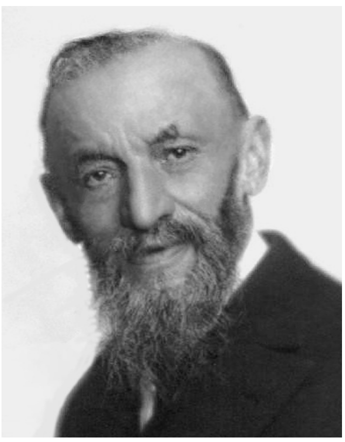


Abbildung 1.1: Giuseppe Peano

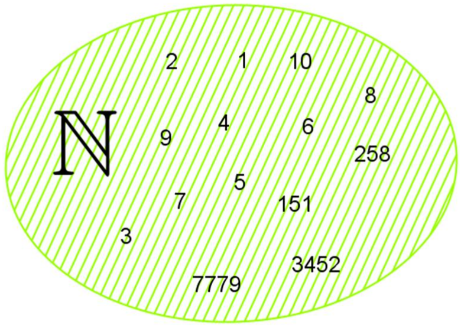


Abbildung 1.2: Menge der natürlichen Zahlen

se „Urzahlen" sind die ***natürlichen Zahlen*** 1,2,3,4,5,….
Mathematiker haben sich im Laufe der vergangenen Jahrtausende oft mit den natürlichen Zahlen auseinandergesetzt. An dieser Stelle wollen wir unbedingt den Mathematiker Peano [1] erwähnen, dem es gelungen ist , diese Zahlenmenge axiomatisch zu definieren, also ein Rezept dafür zu geben, wie man diese Zahlenmenge konstruieren kann.

Peano hat bei seinen Untersuchungen folgende **Eigenschaften** festgestellt:

1. 1 ist die kleinste natürliche Zahl
2. Jede natürliche Zahl besitzt einen Nachfolger
3. Zwischen einer natürlichen Zahl n und deren Nachfolger n+1 liegt keine weitere natürliche Zahl (zum Beispiel: zwischen 4 und 5 findet man keine natürliche Zahl)
4. Es gibt keine größte natürliche Zahl $\Rightarrow \mathbb{N}$ ist unendliche Menge

Die Zahl 0 wird manchmal zu den natürlichen Zahlen gezählt, manchmal aber nicht.

1.1.2 Ganze Zahlen

Symbol: $\mathbb{Z}$

Arbeitet man mit natürlichen Zahlen, so stellt man fest, dass einige Operationen aus $\mathbb{N}$ herausführen. Nehmen wir als Beispiel die Rechnung : $10 - 15 = -5$. Die Zahl -5 ist kein Element der Menge der natürlichen Zahlen, sie ist eine negative Zahl.
In vielen Bereichen des Lebens findet man negative Zahlen, wie zum Beispiel im Geschäftsleben (Verluste), bei Höhen und Tiefen (bezogen auf den Meeresspiegel) , Temperaturen (vorallem im Winter).
Um solche Zahlen einordnen zu können definieren wir die Menge der ganzen Zahlen:

[1] Giuseppe Peano (27. August 1858-20. April 1932) war ein italienischer Mathematiker. Er befasste sich mit mathematischer Logik, mit der Axiomatik der natürlichen Zahlen und mit Differentialgleichungen erster Ordnung.

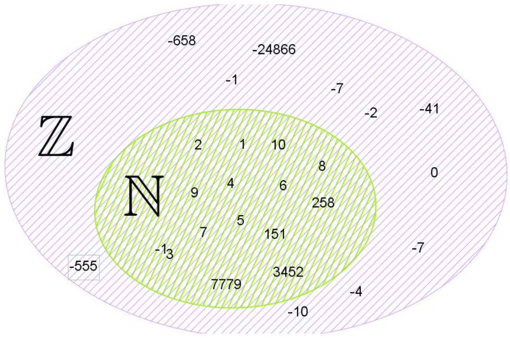


Abbildung 1.3: Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Es ist ja offensichtlich, dass $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ enthalten ist. Man sagt, dass $\mathbb{N}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist, in Zeichen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Jetzt interessieren wir uns dafür, ob auch diese Zahlenmange gewisse Eigenschaften hat. Die Antwort auf diese Frage ist natürlich JA. Fassen wir also die wichtigsten **Eigenschaften** der ganzen Zahlen zusammen:

1. Zwischen zwei benachbarten ganzen Zahlen liegt keine weitere ganze Zahl.
2. Es gibt in $\mathbb{Z}$ weder eine größte noch eine kleinste Zahl.
3. Jede ganze Zahl besitzt genau zwei Nachbarn, einen Vorgänger und einen Nachfolger.

1.1.3 Rationale Zahlen

Symbol: $\mathbb{Q}$

Nicht einmal die ganzen Zahlen sind reichhaltig genug um alle Vorgänge mit ihnen beschreiben zu können. Betrachten wir ein ganz simples Beispiel aus dem Alltag. 4 Pizzaecken ergeben eine ganze Pizza.

Wie könnte man mit ganzen Zahlen ausdrücken, wie groß das Pizzaeck im Verhältnis zur ganzen Pizza ist ?

Das ist natürlich nicht möglich ! Wir wissen ,dass das Pizzaeck $\frac{1}{4}$-tel der ganzen Pizza ist. $\frac{1}{4}$ ist nach unserer Definition aber keine ganze Zahl.

Um solche Aufgaben auch bewältigen zu können definieren wir die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Alle Elemente dieser Menge lassen sich in der Form $\frac{a}{b}$ schreiben, Wir wissen aus der Grundschule, dass der Bruchstrich für die Division steht und dass es verboten ist eine Zahl durch Null zu dividieren. Erinnern wir uns einfach auf den Spruch aus der Grundschule : "Durch 0 kürzen nur die Dummen ".

Bemerkung:

Null darf nicht im Nenner stehen im Zähler aber sehr wohl. In der Sprache der Arithmetik würde man sagen: "Jede Zahl teilt 0*, es gibt aber keine Zahl die durch Null geteilt werden kann."*

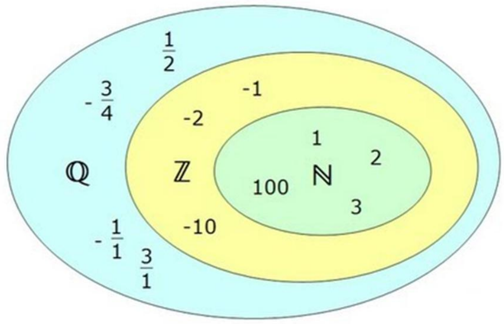


Abbildung 1.4: Menge der rationalen Zahlen

Nach all diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage die Menge der rationalen Zahlen zu definieren :

$$\mathbb{Q} = \{ \tfrac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}\,; b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$$

Bemerkung:

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind als Erweiterung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ entstanden, die wiederum als Erweiterung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ angesehen werden kann.
Daher gilt: *Die Menge der natürlichen Zahlen ist in der Menge der ganzen Zahlen enthalten, die wiederum Teilmenge der rationalen Zahlen ist. Das bedeutet auch,dass jede natürliche und ganze Zahl sich als Bruch schreiben lässt (z.B.: $5 = \frac{5}{1}$)*

In Zeichen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

1.1.4 Reelle Zahlen

Symbol: $\mathbb{R}$

Für die weiteren Untersuchungen wird es notwendig sein, den Begriff der Zahlengerade zu wiederholen.

Wie konstruiert man eine Zahlengerade?

1. Wähle zwei beliebige Punkte aus und verbinde diese mit einer Linie
2. Verlängere die Linie in beide Richtungen
3. Identizifiere die Punkte mit 0 und 1 ($\Rightarrow$ die Strecke die entsteht hat Länge 1 und wird deshalb als Einheitsstrecke bezeichnet)
4. Trage die Einheitsstrecke fortlaufend ab (beginnend von den Punkten 0 und 1), so erhält man Punkte , die man mit den ganzen Zahlen ..., $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$... identifizieren kann

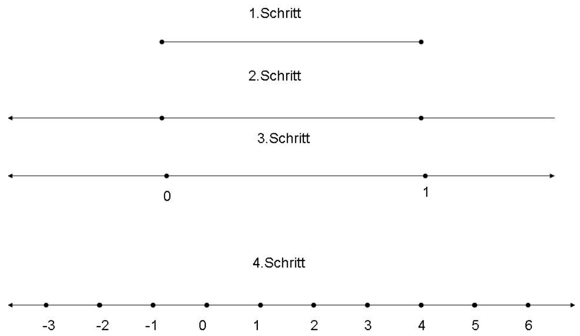


Abbildung 1.5: Konstruktion der Zahlengerade

Bemerkung:

Durch entsprechende Teilungen erhält man Punkte, die den rationale Zahlen entsprechen

Wegen obiger Bemerkung ist es klar, dass jede rationale Zahl einem Punkt auf der Zahlengeraden entspricht. **Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht!** Nicht jeder Punkt der Zahlengerade ist eine rationale Zahl. Mit unseren bisher besprochenen Zahlenmengen lässt sich die Zahlengerade also nicht ganz abdecken. Sie enthält „Lücken “, die uns besonders stören und uns das Rechnen in vielen Situationen um einiges erschweren. Zum Glück gibts es Zahlen, die wir erst im nächsten Abschnitt einführen werden, die diese bereits angesprochenen „Lücken “ausfüllen.
Eine besonders berühmte "Lücke" auf der Zahlengeraden ist die "Lücke " an der stelle $\sqrt{2}$. Vor dieser Zahl lässt sich sogar beweisen, dass sie nicht rational ist. [2] [3]

Satz 1. $\sqrt{2}$ *ist keine rationale Zahl*

Beweis:. Wir führen einen indirekten Beweis. Dazu müssen wir zuerst das Gegenteil unserer zu beweisenden Behauptung annehmen.Im ersten Schritt müssen wir uns klar machen, was wir überhaupt beweisen wollen. Wir wollen beweisen,dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist.Wenn wir das Gegenteil annehmen, gehen wir davon aus, dass $\sqrt{2}$ nicht *irrational* [4] sondern **rational** ist.
Nehmen wir also an, $\sqrt{2}$ wäre eine rationale Zahl. Das bedeutet , dass wir $\sqrt{2}$ in der Bruchform schreiben können. Das heißt, wir finden ganze Zahlen p und q (*in Zeichen*: $p, q \in \mathbb{Z}$) sodass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ gilt mit $q \neq 0$. Wir wissen auch,dass unter der Wurzel keine negative Zahl stehen darf. Nehmen wir also an, p und q wären positiv und so weit wie möglich gekürzt (man sagt auch, dass p und q teilerfremd sind). $\sqrt{2}$ ist eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$. Da $1^2 = 1$, $(\sqrt{2})^2 = 2$ und $2^2 = 4$ gilt muss $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 liegen (*in Zeichen:* $1 < \sqrt{2} < 2$). Somit kann $\sqrt{2}$ keine ganze Zahl sein .
Wir quadrieren beide Seiten der Gleichung $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ und erhalten dadurch $2 = \frac{p^2}{q^2}$. Da p und q nach Voraussetzung teilerfremd waren, kann der Bruch $\frac{p^2}{q^2}$ auch nicht weiter gekürzt werden, stellt also keine ganze Zahl dar. Das würde aber heißen, dass 2 auch keine ganze Zahl ist, was offensichtlich im Wiederspruch zur "Realität" steht.

[2] Der griechische Mathematiker Euklid (330-275 v.Chr.) verwendete für den Beweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, einen indirekten Beweis. Dieses Beweismethode wird in der Mathematik oft verwendet und nimmt zunächst an, das Gegenteil der zu beweisenden Aussage sei wahr, und leitet daraus einen Widerspruch ab.**Somit kann das Gegenteil der Aussage nicht richtig sein, d.h. die Aussage selbst muss richtig sein.**

[3] $\sqrt{2}$ ist die Länge der Diagonale eines Quadrats mit Seitenlänge 1

[4] nicht rational = irrational

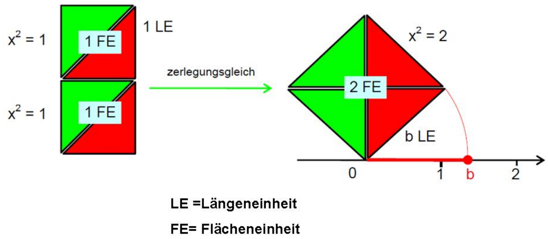


Abbildung 1.6: Graphische Lösung von $x^2 = 2$

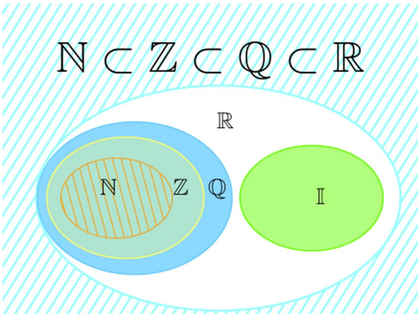


Abbildung 1.7: Anschauliche Zusammenfassung der Zahlenmengen

Die Annahme , dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist muss also falsch sein.
$\sqrt{2}$ ist also NICHT rational (anders gesagt: irrational).

$\square$

Bemerkung:

Die Gleichung $x^2 = 2$ lässt sich auch graphisch lösen (Abbildung 6)

Die Menge der reellen Zahlen ist die größte Zahlenmenge, mit der wir uns in der Mittelschule beschäftigen werden.

1.1.5 Irrationale Zahlen

Symbol: $\mathbb{I}$

Im Abschnitt (1.1.3) haben wir erwähnt, dass es Stellen auf der Zahlengerade gibt, die keinen rationalen Zahlen entsprechen und haben diese als "Lücken" bezeichnet. Jetzt wollen wir ein bisschen korrekter formulieren und definieren die Menge der irrationalen Zahlen (das ist die "Menge der Lücken" auf der Zahlengerade).

Reelle Zahlen, die nicht rational sind, werden als irrationale Zahlen bezeichnet. Im Abschnitt 1.1.4. haben wir bereits eine irrationale Zahl ($\sqrt{2}$) kennengelernt, von der wir sogar bewiesen haben, dass sie tatsächlich nicht rational ist.

Als weiteres Beispiel für irrationale Zahlen wollen wir die Zahl π erwähnen. π hat unendlich viele Nachkommastellen und lässt sich nicht als Bruch schreiben.

π auf 5000 Nachkomastellen genau berechnet:

π =3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899
8628034825 3421170679 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193
8521105559 6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 4564856692
3460348610 4543266482 1339360726 0249141273 7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 3305727036 5759591953 0921861173 8193261179
3105118548 0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912 9833673362 4406566430 8602139494
6395224737 1907021798 6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132 0005681271 4526356082
7785771342 7577896091 7363717872 1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235 4201995611
2129021960 8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859
5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881 7101000313 7838752886 5875332083 8142061717
7669147303 5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 1857780532 1712268066 1300192787
6611195909 2164201989 3809525720 1065485863 2788659361 5338182796 8230301952 0353018529 6899577362
2599413891 2497217752 8347913151 5574857242 4541506959 5082953311 6861727855 8890750983 8175463746
4939319255 0604009277 0167113900 9848824012 8583616035 6370766010 4710181942 9555961989 4676783744
9448255379 7747268471 0404753464 6208046684 2590694912 9331367702 8989152104 7521620569 6602405803
8150193511 2533824300 3558764024 7496473263 9141992726 0426992279 6782354781 6360093417 2164121992
4586315030 2861829745 5570674983 8505494588 5869269956 9092721079 7509302955 3211653449 8720275596
0236480665 4991198818 3479775356 6369807426 5425278625 5181841757 4672890977 7727938000 8164706001
6145249192 1732172147 7235014144 1973568548 1613611573 5255213347 5741849468 4385233239 0739414333
4547762416 8625189835 6948556209 9219222184 2725502542 5688767179 0494601653 4668049886 2723279178
6085784383 8279679766 8145410095 3883786360 9506800642 2512520511 7392984896 0841284886 2694560424
1965285022 2106611863 0674427862 2039194945 0471237137 8696095636 4371917287 4677646575 7396241389
0865832645 9958133904 7802759009 9465764078 9512694683 9835259570 9825822620 5224894077 2671947826
8482601476 9909026401 3639443745 5305068203 4962524517 4939965143 1429809190 6592509372 2169646151
5709858387 4105978859 5977297549 8930161753 9284681382 6868386894 2774155991 8559252459 5395943104
9972524680 8459872736 4469584865 3836736222 6260991246 0805124388 4390451244 1365497627 8079771569
1435997700 1296160894 4169486855 5848406353 4220722258 2848864815 8456028506 0168427394 5226746767
8895252138 5225499546 6672782398 6456596116 3548862305 7745649803 5593634568 1743241125 1507606947
9451096596 0940252288 7971089314 5669136867 2287489405 6010150330 8617928680 9208747609 1782493858
9009714909 6759852613 6554978189 3129784821 6829989487 2265880485 7564014270 4775551323 7964145152
3746234364 5428584447 9526586782 1051141354 7357395231 1342716610 2135969536 2314429524 8493718711
0145765403 5902799344 0374200731 0578539062 1983874478 0847848968 3321445713 8687519435 0643021845
3191048481 0053706146 8067491927 8191197939 9520614196 6342875444 0643745123 7181921799 9839101591
9561814675 1426912397 4894090718 6494231961 5679452080 9514655022 5231603881 9301420937 6213785595
6638937787 0830390697 9207734672 2182562599 6615014215 0306803844 7734549202 6054146659 2520149744
2850732518 6660021324 3408819071 0486331734 6496514539 0579626856 1005508106 6587969981 6357473638
4052571459 1028970641 4011097120 6280439039 7595156771 5770042033 7869936007 2305587631 7635942187
3125147120 5329281918 2618612586 7321579198 4148488291 6447060957 5270695722 0917567116 7229109816
9091528017 3506712748 5832228718 3520935396 5725121083 5791513698 8209144421 0067510334 6711031412
6711136990 8658516398 3150197016 5151168517 1437657618 3515565088 4909989859 9823873455 2833163550
7647918535 8932261854 8963213293 3089857064 2046752590 7091548141 6549859461 6371802709 8199430992
4488957571 2828905923 2332609729 9712084433 5732654893 8239119325 9746366730 5836041428 1388303203
8249037589 8524374417 0291327656 1809377344 4030707469 2112019130 2033038019 7621101100 4492932151
6084244485 9637669838 9522868478 3123552658 2131449576 8572624334 4189303968 6426243410 7732269780
2807318915 4411010446 8232527162 0105265227 2111660396 6655730925 4711055785 3763466820 6531098965
2691862056 4769312570 5863566201 8558100729 3606598764 8611791045 3348850346 1136576867 5324944166
8039626579 7877185560 8455296541 2665408530 6143444318 5867697514 5661406800 7002378776 5913440171
2749470420 5622305389 9456131407 1127000407 8547332699 3908145466 4645880797 2708266830 6343285878
5698305235 8089330657 5740679545 7163775254 2021149557 6158140025 0126228594 1302164715 5097925923
0990796547 3761255176 5675135751 7829666454 7791745011 2996148903 0463994713 2962107340 4375189573
5961458901 9389713111 7904297828 5647503203 1986915140 2870808599 0480109412 1472213179 4764777262
2414254854 5403321571 8530614228 8137585043 0633217518 2979866223 7172159160 7716692547 4873898665

4949450114 6540628433 6639379003 9769265672 1463853067 3609657120 9180763832 7166416274 8888007869 2560290228 4721040317 2118608204 1900042296 6171196377 9213375751 1495950156 6049631862 9472654736 4252308177 0367515906 7350235072 8354056704 0386743513 6222247715 8915049530 9844489333 0963408780 7693259939 7805419341 4473774418 4263129860 8099888687 4132604721...

1.2 Dezimaldarstellung reeller Zahlen

1.2.1 Dezimaldarstellung rationaler Zahlen

Wie wir das bereits im Abschnitt (1.1.3) gesehen haben gibt es für rationale Zahlen eine spezielle Schreibweise, die Bruchschreibweise. Alle Brüche können aber auch in der sogenannten **Dezimaldarstellung** geschrieben werden .Diese setzt sich aus Ziffern und der Kommadarstellung zusammen. Wir wissen, dass der Bruchstrich einer Division entspricht. Führt man diese aus, so erhält man die Dezimaldarstellung. Nehmen wir als Beispiel die Zahl $\frac{3}{5}$. Wir wollen wissen, wie diese Zahl in der Dezimaldarstellung aussieht. Wir rechnen also $3 : 5$,was genau $0,6$ entspricht.

$$\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0,6$$

Es kann aber auch sein, dass in der Dezimaldarstellung nicht nur eine , sondern mehrere Nachkomastellen vorhanden sind.
Betrachten wir wieder ein Beispiel. Sei der Bruch, den wir in die Dezimaldarstellung bringen wollen $\frac{1}{8}$.

$$\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0,125$$

Bei obigen Beispielen treten nach dem Komma nur endlich viele Ziffern auf. In diesen Fällen reden wir von einer **endlichen Dezimaldarstellung**. Es gibt auch Brüche, bei denen in der Dezimaldarstellung unendlich viele Ziffern nach dem Komma auftreten. In diesem Fall reden wir von einer **unendlichen Dezimaldarstellung**.
Ein ganz einfaches Beispiel für die unendliche Dezimaldarstellung ist der Bruch $\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,3333333333333333333333333333333333333..................$$

Endliche Dezimaldarstellung :$\frac{1}{8} = 0,125$

Unendliche Dezimaldarstellung :$\frac{1}{3} = 0,3333333333333333333.....$

In vielen Büchern wird für rationale Zahlen, die in der Dezimaldarstellung geschrieben sind, die Bezeichnung Dezimalzahl verwendet. An dieser Stelle wollen wir betonen, dass diese Bezeichnung keinen Sinn hat. "Dezimalzahlen" bilden keine eigene Zahlenmenge wie zum Beispiel die ganzen Zahlen. Es handelt sich dabei bloß um eine spezielle Darstellung rationaler Zahlen. Die korrekte Formulierung lautet daher: *"Dezimaldarstellung einer Zahl"*.
Untersuchen wir die rationalen Zahlen mit unendlicher Dezimaldarstellung genauer, so erkennen wir gewisse "Regelmäßigkeiten" in ihrem Aufbau. Ab einer gewissen Stelle, wiederholen sich die Ziffern in "gleichartigen Blöcken".

Was soll das aber heißen? Betrachten wir folgende Beispiele:

- **Beispiel 1.:**

  $$\frac{2}{3} = 0,6666666666666666666.....=0,\dot{6}$$

  In unserem Beispiel wiederholt sich gleich die erste Zahl nach dem Komma. In diesem Fall schreiben wir über die Zahl, die sich ständig wiederholt einen Punkt (z.B.: $0,\dot{6}$). Diese Schreibweise spart uns viel Zeit und Platz.

- **Beispiel 2.:**

  $$\frac{172}{333} = 0,51651651516516.....=0,\overline{516}$$

In diesem Beispiel wiederholen sich gleich die ersten 3 Zahlen nach dem Komma *(unendlich oft)*. Wir bezeichnen dieses Phänomen als periodische Dezimaldarstellung. Notationstechnisch ziehen wir einfach eine Linie über den sich wiederholenden Zahlenblock.

- **Beispiel 3.:**

$$\frac{172}{555} = 0,3099099099099099.....=0,3\overline{099}$$

Das Neue bei diesem Beispiel ist, dass sich nicht gleich die erste Zahl nach dem Komma wiederholt. Die Wiederholung setzt erst ab der zweiten Stelle ein und passiert in dreier Blöcken (099). Die Notation ist die selbe wie beim Beispiel 2. Diese Art der Darstellung wird als gemischperiodische Dezimaldarstellung genannt.

Allgemein gilt folgender:

Satz 2. *Die Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl ist entweder endlich oder periodisch.*

Bei allen mathematischen Beweisen, versuchen wir Aussagen/Sätze allgemein zu beweisen. Das ist der Grund dafür ,warum wir beim Beweis nicht einen konkreten Bruch (wie z.B.: $\frac{2}{7}$) betrachten werden, sondern allgemeine Brüche / rational Zahlen.

Beweis:. Sei also $\frac{a}{b}$ eine positive rationale Zahl mit $b \neq 0$. Wir dividieren also a durch b und schauen was passiert. Eine Möglichkeit ist, dass nach einigen Divisionsschritten als Rest 0 auftaucht. Dann sind wir mit der Division fertig und erhalten eine endliche Dezimaldarstellung für $\frac{a}{b}$. Die andere Möglichkeit ist, dass bei der Division nie die Zahl 0 als Rest auftaucht. Das heißt aber ,dass als Rest nur die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., b - 1$ auftauchen.

Dieser letzte Schritt bedarf vielleicht einiger Erklärung. Die Frage, die sich stellen könnte ist, warum b-1 der größte Rest ist, der vorkommen kann. Die Antwort ist ziemlich einfach. Wir dividieren a durch b. Wir schauen uns also an , wie oft b in a enthalten ist, wobei wir die ganze Zeit in Errinerung haben , dass sowohl a als auch b ganze Zahlen sind. Trete b als Rest auf, so würde das heißen, dass bei der Division doch 0 als Rest entstehen sollte, da b in b einmal enthalten ist. Das bedeutet aber, dass wir die nächst kleinere Zahl betrachten müssen, die ist klarerweise b-1, da b eine ganze Zahl ist.

Sobald wir bei unserer Division das Komma überschritten haben, muss selbstverständlich spätestens nach b weiteren Schritten ein Rest auftreten, der schon einmal während der Division als Nachkommastelle vorgekommen ist. Ab dieser Stelle wiederholt sich aber alles und wir erhalten dadurch die gewünschte periodische Dezimaldarstellung.

Die Dezimaldarstellung einer negativen rationalen Zahl unterscheidet sich von der Dezimaldarstellung der betragsmäßig gleichen rationalen Zahl nur durch das vorgesetzte Minuszeichen. Also wir können die Resultate über die Dezimaldarstellung positiver rationalen Zahlen für die negativen rationalen Zahlen einfach übernehmen.
Damit wir alle rationalen Zahlen abdecken, müssen wir noch eine Vereinbarung für 0 machen. Per Konvention gilt, dass die Zahl 0 eine endliche Dezimaldarstellung 0 besitzt. □

Bemerkung:

Der obige Beweis könnte auch kürzer geführt werden, solange uns aber die Routine fehlt, werden wir versuchen die Beweise sehr ausführlich zu beschreiben.

Die letzte Sache, die wir noch besprechen müssen, ist ,wie wir von der Dezimaldarstellung in die Bruchdarstellung bringen können. Dabei müssen wir berücksichtigen , ob die von uns betrachtete Dezimaldarstellung endlich oder periodisch ist.
Bei einer endlichen Dezimaldarstellung ist es ganz leicht die entsprechende Bruchdarstellung zu finden. Nehmen wir wieder ein Beispiel:

*Unsere Aufgabe ist jetzt die Zahlen **a.)** 0,75 und **b.)**0,256 von der Dezimaldarstellung in die Bruchform zu bringen.*

- a.) 0,75
  betrachten wir folgende Tabelle:

Einser	Zehntel	Hundertstel
0	7	5

  Es ist offensichtlich, dass wir insgesamt 75 Hundertstel haben. Wie wir das jetzt als Bruch schreiben, ist ganz einfach. Wir dividieren 75 durch 100. Das können wir sehr einfach als Bruch schreiben, nämlich als $\frac{75}{100}$. Wir haben also einfach unsere Definition für die rationalen Zahlen ausgenutzt. Jetzt können wir weitere Vereinfachungen vornehmen, um auf die eleganteste Lösung zu kommen.

$$75 : 100 = \frac{75}{100} = \frac{25 \cdot 3}{25 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

- b.)0,256

  Wir können analog zum obigen Beispiel vorgehen.

Einser	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel
0	2	5	6

  Insgesamt haben wir also 256 Tausendstel. Die Rechnung schaut also folgendermaßen aus:

$$256 : 1000 = \frac{256}{1000} = \frac{8 \cdot 32}{8 \cdot 125} = \frac{32}{125}$$

Bemerkung:

Bei einer endlichen Dezimaldarstellung ist es oft hilfreich die Zahl, die wir als Bruch schreiben wollen auszusprechen und das "Gesagte" hinzuschreiben. Diese ist natürlich keine mathematisch korrekte und akzeptierte Methode, kann für uns aber sehr nützlich sein.

Im Falle einer periodischen Dezimaldarstellung müssen wir ein bisschen trickreicher vorgehen. Betrachten wir zum Beispiel die Zahl 1,535353535353......
Es ist offensichtlich, dass diese Zahl normal periodisch ist und sich die Nachkommastellen 53 unendlich oft wiederholen.

Rechnung	Erklärung
$x = 1,535353535353...$	Sei also die Zahl, die wir betrachten 1,535353535353...
$100x = 153,5353535353...$	Da unsere ursprüngliche Zahl nach dem Komma sich in zweier Blöcken *(Hundertstel)* wiederholt, multiplizieren wir x mit 100 *anschaulich gesprochen: 100 und Hundertstel heben sich auf*
$99x = 152$	Ziehen wir von 100x die Zahl x ab, so werden wir den Nachkomastellen los . *("Der Grund dafür ist der ähnliche Bau" von x und 100x)*
$x = \frac{152}{99}$	Wir lösen die Gleichung nach x

Wie wir bereits wissen, gibt es auch gemischt periodische Dezimalzahlen, die wir natürlich auch auf die Bruchform bringen wollen. Die Vorgehensweise wird wieder an einem konkreten Beispiel erleuchtet.

Rechnung	Erklärung
$x = 2,3099099099...$	Sei die Zahl, die wir betrachten 2,3099099099...
$10x = 23,099099...$	Da nach dem Komma nur eine Zahl, vor der sich periodisch wiederholenden Zahlen steht, multiplizieren unsere Zahl mit 10 *(Dieser Schritt wird erst später wichtig werden)*
$10000x = 23099,099099.....$	Da sich die Nachkomastellen nach der Stelle Zehntausendstel wiederholt, multiplizieren wir x mit 10000 *anschaulich gesprochen:10000 und Zehntausendstel heben sich auf*
$9990x = 23076$	Ziehen wir von 10000x die Zahl 10x ab, so werden wir den Nachkomastellen los . *("Der Grund dafür ist der ähnliche Bau" von 10000x und 10x)*
$x = \frac{23076}{9990}$	Wir lösen die Gleichung nach x
$x = \frac{23076}{9990} = \frac{18 \cdot 1282}{18 \cdot 555}$	
$x = \frac{1282}{555}$	Wir haben einfach den Ausgangsbruch gekürzt

1.2.2 Dezimaldarstellung irrationaler Zahlen

Irrationale Zahlen besitzen auch eine Dezimaldarstellung, obwohl sie sich nicht als Bruch schreiben lassen. Die Dezimaldarstellung einer irrationalen Zahl kann aber nur näherungsweise ermittelt werden, mit dem sogenannten **Zehntelungsverfahren**. Dieses Verfahren ist ein bisschen kompliziert und bedarf einige Zeit. Im folgenden Beispiel geben wir eine näherungsweise Dezimaldarstellung der wohlbekannten irrationalen Zahl $\sqrt{2}$.

Rechnung	**Erklärung**
$1^2 < 2 < 2^2 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$	Diese "Abschätzung" kennen wir bereits aus dem Beweis zur Irrationalität von $\sqrt{2}$, kann aber sehr einfach eingesehen werden
$1,4^2 < 2 < 1,5^2 \Rightarrow 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$	Man sucht zwei aufeinanderfolgende Zahlen mit einer Nachkomastelle und der Eigenschaft, dass $\sqrt{2}$ zwischen denen liegt.
$1,41^2 < 2 < 1,42^2 \Rightarrow 1,41 < \sqrt{2} < 1,42$	Man sucht zwei aufeinanderfolgende Zahlen mit zwei Nachkomastellen so dass, $\sqrt{2}$ zwischen denen liegt.

Wenn wir das Verfahren fortsetzen, können wir beliebig viele Nachkomastellen ermitteln, die dann den Wert von $\sqrt{2}$ genauer angeben. Eines müssen wir aber an dieser Stelle klar machen. **Es ist unmöglich eine vollständige Dezimaldarstellung einer irrationalen Zahl anzugeben!**. Der Grund dafür liegt im folgenden Satz.

Satz 3. *Irrationale Zahlen besitzen eine unendliche aber nicht periodische Dezimaldarstellung*

Beweis:. Um obigen Satz zu beweisen, verwenden wir wieder die Methode des indirekten beweisens. Wir nehmen also das Gegenteil davon an , was wir eigentlich zeigen wollen, und führen diese "falsche" Annahme auf ein Wiederspruch.
Nehmen wir also an, die Dezimaldarstellung einer irrationalen Zahl wäre endlich oder periodisch. [5] Das heißt für uns, dass wir diese als Bruch schreiben können (nach 1.2.1), was aber gleichbedeutend ist mit der Rationaltät der Zahl. Somit haben wir schon unseren gewünschten Widerspruch, da wir davon ausgegangen sind, dass unsere Zahl irrational ist. □

1.3 Potenzregeln

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der Potenz [6] einführen und die wichtigsten Regeln des Potenzierens besprechen.

Definition:

Eine Potenz ist eine Multiplikation gleicher Faktoren a (=Basis), bei der der Exponent n die Anzahl der Faktoren angibt.

$$a^n := \overbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}^{n-Faktoren}$$

$$(a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*)$$ [a]

[a] $\mathbb{N}^*$ steht für $\mathbb{N}$ mit $\{0\}$

[5] In der mathematischen Logik wird "oder" als Gegenteil von "und" verwendet.
[6] Das Wort Potenz kommt aus dem lateinischen Wort *potentia= Macht, Vermögen*

Beispiele:

a.)	$2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$	**Basis**: 2, **Exponent**:7
b.)	$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$	**Basis**: 3, **Exponent**:4
c.)	$5 = 5^1 = 5$	**Basis**: 5, **Exponent**:1
d.)	$11^9 = 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 2357947691$	**Basis**: 11, **Exponent**:9

Wenn man mit Potenzen rechnet, muss man sich an gewisse Regeln halten, die wir in folgender Tabelle zusammenfassen.

- **Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis:**

  Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem ihre Exponenten addiert werden

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Beweis: $a^n \cdot a^m = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-mal}}_{(n+m)-mal} \overbrace{=}^{per Definition} a^{n+m}$

$\square$

Beispiel: $2^3 \cdot 2^5 = \underbrace{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3-mal} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5-mal}}_{3+5=8-mal} = 2^8$

- **Division von Potenzen mit gleicher Basis:**

  Merkregel:" Bei der Multiplikation haben wir addiert, bei der Division müssen wir also subtrahieren"

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Beweis: $\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot a}^{n-mal}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{m-mal}} \overbrace{=}^{Vereinfachung} \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}^{(n-m)-mal}$

$\square$

Beispiel: $\frac{3^7}{3^4} = \frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{7-mal}}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4-mal}} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 3^{7-4}$

- **Potenz mit dem Exponent 0:**

$$a^0 = 1$$

Beweis: $a^0 = a^{n-n} \overbrace{=}^{Potenzdivision} \frac{a^n}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n-mal}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal}} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}} = 1$

□

Beispiel: $16485^0 = 1$

- **Potenz mit dem Exponent 1:**

$$a^1 = a$$

Beweis: $a^1 = a^{n-n+1} = a^{n-(n-1)} = \frac{a^n}{a^{n-1}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n-mal}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(n-1)-mal}} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}} = a$

□

Beispiel: $185^1 = 185$

- **Potenzierung von Brüchen:**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad a, b \in \mathbb{R}\,;\, b \neq 0$$

Beweis: $(\frac{a}{b})^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n-mal} = \frac{a^n}{b^n}$

□

Beispiel: $(\frac{3}{5})^3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \overbrace{=}^{perDefinition} \frac{3^3}{5^5}$

- **Potenzierung von Potenzen:**

Potenzen werden potenziert, indem alle Exponenten miteinander multipliziert werden

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Beweis: $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m-mal} = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-mal} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-mal} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-mal}}_{m-mal}$

$$\overbrace{=}^{perDefinition} a^{n \cdot m}$$

□

Beispiel: $(5^3)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 5^{3 \cdot 2}$

- **Potenz mit negativem Exponenten:**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Beweis: $a^{-n} = a^{0-n} \overbrace{=}^{Divisonsregel} \frac{a^0}{a^n} \overbrace{=}^{Exponent=0} \frac{1}{a^n}$

□

Beispiel: $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$

- **Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponent:**

Potenzen mit gleichem Exponent werden multipliziert, indem die Basen multipliziert werden.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Beispiel: $(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x = 2^3x^3$

Beispiel 1. :
Vereinfache folgenden Ausdruck!

$$\frac{(x^{-3})^{-8} \cdot (x^{-2})^3 \cdot (x^{-5})^7}{(x^5)^5 \cdot (x^2)^5 \cdot (x^2)^{-2}} \quad \text{mit } x \neq 0$$

1. Im ersten Schritt vereinfachen wir nur den Zähler:

$$\overbrace{(x^{-3})^{-8} \cdot (x^{-2})^3 \cdot (x^{-5})^7}^{Potenzierung\ vonPotenzen} = \underbrace{x^{24} \cdot x^{-6} \cdot x^{-35}}_{Multiplikation\ von\ Potenzen\ mit\ gleicher\ Basis} = x^{24+(-6)+(-35)} = x^{24-6-35} = x^{-17}$$

2. Wir vereinfachen den Nenner:

$$\overbrace{(x^5)^5 \cdot (x^2)^5 \cdot (x^2)^{-2}}^{Potenzierung\ vonPotenzen} = \underbrace{x^{25} \cdot x^{10} \cdot x^{-4}}_{Multiplikation\ von\ Potenzen\ mit\ gleicher\ Basis} = x^{25+10+(-4)} = x^{31}$$

3. Jetzt können wir den gesamten Bruch vereinfachen:

$$\frac{(x^{-3})^{-8} \cdot (x^{-2})^3 \cdot (x^{-5})^7}{(x^5)^5 \cdot (x^2)^5 \cdot (x^2)^{-2}} \overbrace{=}^{Wegen\ 1.\ und\ 2.} \underbrace{\frac{x^{-17}}{x^{31}}}_{Division\ von\ Potenzen\ mit\ gleicher\ Basis} = x^{-17-31} = x^{-48}$$

Beispiel 2. :
Vereinfache folgenden Ausdruck!

$$\left(\frac{x^{-3}}{y^{-1}}\right)^5 \cdot \frac{(x^2 \cdot y^{-3})^3}{(y^2)^{-2}} : \left(\frac{y^{-2} \cdot x}{x^{-2}y^3}\right)^{-3} \quad \text{mit } x \neq 0 \; und \; y \neq 0$$

1. Wir beginnen mit dem ersten Term auf der linken Seite:

$$\overbrace{\left(\frac{x^{-3}}{y^{-1}}\right)^5}^{\textit{Potenzierung von Brüchen}} = \frac{x^{-15}}{y^{-5}}$$

2. Als nächstes schauen wir uns den Term $\frac{(x^2\cdot y^{-3})^3}{(y^2)^{-2}}$ an:

$$\frac{(x^2\cdot y^{-3})^3}{(y^2)^{-2}} \overbrace{=}^{\textit{Potenzen mit gleichem Exponent}} \frac{x^6\cdot y^{-9}}{y^{-4}}$$

3. Den letzten Term können wir auch sehr leicht umschreiben:

$$\left(\frac{y^{-2}\cdot x}{x^{-2}y^3}\right)^{-3} = \frac{y^6\cdot x^{-3}}{x^6\cdot y^{-9}}$$

4. Somit haben wir:

$$\left(\frac{x^{-3}}{y^{-1}}\right)^5 \cdot \frac{(x^2\cdot y^{-3})^3}{(y^2)^{-2}} : \left(\frac{y^{-2}\cdot x}{x^{-2}y^3}\right)^{-3} = \frac{x^{-15}}{y^{-5}} \cdot \frac{x^6\cdot y^{-9}}{y^{-4}} : \frac{y^6\cdot x^{-3}}{x^6\cdot y^{-9}}$$

5. Da die Division von Brüchen der Multiplikation mit dem Kehrwert entspricht, können wir den Ausdruck in folgender Form schreiben:

$$\frac{x^{-15}}{y^{-5}} \cdot \frac{x^6\cdot y^{-9}}{y^{-4}} : \frac{y^6\cdot x^{-3}}{x^6\cdot y^{-9}} = \frac{x^{-15}}{y^{-5}} \cdot \frac{x^6\cdot y^{-9}}{y^{-4}} \cdot \frac{x^6\cdot y^{-9}}{y^6\cdot x^{-3}}$$

6. Jetzt führen wir die Multiplikation aus:

$$\frac{x^{-15}}{y^{-5}} \cdot \frac{x^6\cdot y^{-9}}{y^{-4}} \cdot \frac{x^6\cdot y^{-9}}{y^6\cdot x^{-3}} = \frac{x^{-15}\cdot x^6\cdot y^{-9}\cdot x^6\cdot y^{-9}}{y^{-5}\cdot y^{-4}\cdot y^6\cdot x^{-3}}$$

7. Potenzen mit gleicher Basis können zusammenmultipliziert werden:

$$\frac{x^{-15}\cdot x^6\cdot y^{-9}\cdot x^6\cdot y^{-9}}{y^{-5}\cdot y^{-4}\cdot y^6\cdot x^{-3}} = \frac{x^{-15+6+6}\cdot y^{-9+(-9)}}{y^{-5+(-4)+6}\cdot x^{-3}} = \frac{x^{-3}\cdot y^{-18}}{y^{-3}\cdot x^{-3}}$$

8. Im letzten Schritt führen wir die Division aus:

$$\frac{x^{-3}\cdot y^{-18}}{y^{-3}\cdot x^{-3}} = \frac{x^{-3}\cdot y^{-18}}{x^{-3}\cdot y^{-3}} = \underbrace{\frac{x^{-3}}{x^{-3}} \cdot \frac{y^{-18}}{y^{-3}}}_{\textit{Division von Potenzen mit gleicher Basis}} = x^{-3-(-3)} \cdot y^{-18-(-3)} =$$

$$\underbrace{x^0}_{=1} \cdot \underbrace{y^{-15}}_{=\frac{1}{y^{15}}} = \frac{1}{y^{15}}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{x^{-3}}{y^{-1}}\right)^5 \cdot \frac{(x^2\cdot y^{-3})^3}{(y^2)^{-2}} : \left(\frac{y^{-2}\cdot x}{x^{-2}y^3}\right)^{-3} = \frac{1}{y^{15}}}$$

1.4 Zehnerpotenzen und Gleitkommadarstellung

Da Potenzen mit der Basis 10 in der Wissenschaft eine sehr wichtige Rolle spielen, wollen wir uns in diesem Abschnitt genauer mit ihnen beschäftigen.

Eine Zehnerpotenz ist ein Ausdruck der Form 10^n mit ($n \in \mathbb{Z}$)

Beispiele:

- 100 000 = 10^5

- 356 000 000 = $3,56 \cdot 10^8$
- 0,001= $\frac{1}{1000}$ = $\frac{1}{10^3}$ =10^{-3}
- 0,000096 = $9,6 \cdot 0,000001$ = $9,6 \cdot \frac{1}{100000}$ = $9,6 \cdot \frac{1}{10^5}$ = $9,6 \cdot 10^{-5}$

Zehnerpotenzen werden vor allem dazu verwendet, komplizierte und lange Ausdrücke in einer möglichst kompakten Form zu schreiben. An dieser Stelle wollen wir unbedingt erwähnen,dass bei Ausdrücken, die als Zehnerpotenz dargestellt werden ,oft auf die Genauigkeit verzichtet wird *(siehe Beispiel 2 unten).*
Schauen wir uns drei leichte Beispiele an:

Beispiel 1.:

Die Lichtgeschwindigkeit [7] beträgt ungefähr 300 000 000 $\frac{m}{s}$. Wollen wir diese Zahl einfacher schreiben, so müssen wir folgendermaßen vorgehen:

$$300000000 = 3 \cdot 100000000\frac{m}{s} = 3 \cdot 10^8\frac{m}{s}$$

Wir schreiben also die Zahl als Produkt aus einer beliebigen Zahl und einer Zehnerpotenz.

Beispiel 2.:

Wie groß ist der Weg , den das Licht in einem Jahr zurücklegt?

Aus obigem Beispiel wissen wir, dass die Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\frac{m}{s}$ beträgt. Das Licht legt also $3 \cdot 10^8$ Meter pro Sekunde zurück. Um zu berechnen wie groß sein zurückgelegter Weg in einem Jahr ist, müssen wir also wissen, wie viele Sekunden ein Jahr hat. Wir gehen der Einfachkeit halber davon aus, dass ein Jahr genau 365 Tage hat. Jeder Tag hat 24 Stunden und jede Stunde hat 60 Minuten. Eine Minute ist 60 Sekunden lang, wir können also für die Zeit t folgende Rechnung aufschreiben:

$$t = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31536000 \sim 3,15 \cdot 10^7$$

Ein Jahr hat also ungefähr $3,15 \cdot 10^7$ Sekunden. Ab jetzt geht aber die Rechnung ganz leicht. Da in jeder Sekunde $3 \cdot 10^8$ Meter zurückgelegt werden gilt für den **Gesamtweg:**

$$3 \cdot 10^8 \cdot 3,15 \cdot 10^7 m = 9,45 \cdot 10^{15} m = 9,45 \cdot 10^{12} km$$

Das Licht legt also $9,45 \cdot 10^{12} km$ in einem Jahr zurück.

Beispiel 3.:

Wie groß ist die Masse der Erde und der Sonne insgesamt?

Die Erdmasse liegt bei $5,974 \cdot 10^{24}$ kg und die Sonne ist ungefähr $1,99 \cdot 10^{30}$ kg schwer.

Für die Gesamtmasse gilt:

$5,974 \cdot 10^{24}$ kg + $1,99 \cdot 10^{30}$ kg = $5,974 \cdot 10^{24} + 1990000 \cdot 10^{24}$ kg =$1990005,974 \cdot 10^{24}$ kg anders könnte diese Masse auch als $1,990005974 \cdot 10^{30}$ kg geschrieben werden.

An dieser Stelle wollen wir den Begriff der Gleitkommadarstellung einführen.

Eine Reelle Zahl der Form $a \cdot 10^k$ wird Gleitkommadarstellung der Zahl genannt, wenn $1 \leq |a| \leq 10$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

[7]Die Lichtgeschwindigkeit wird in der Physik mit c bezeichnet

Große und kleine Größen

Als Mathematiker müssen wir manchmal mit sehr großen bzw. sehr kleinen Einheiten rechnen können, die in den Naturwissenschaften verwendet werden. Um eine Basis für unsere weiteren Untersuchungen zu geben , haben wir in folgender Tabelle die wichtigsten Vorsatzzeichen (auch genannt Präfixe) zusammengefasst:

Name	Symbol	Wert		
Yotta	**Y**	10^{24}	Quadrillion[a]	1 000 000 000 000 000 000 000 000
Zetta	**Z**	10^{21}	Trilliarde	1 000 000 000 000 000 000 000
Exa	**E**	10^{18}	Trillion	1 000 000 000 000 000 000
Peta	**P**	10^{15}	Billiarde	1 000 000 000 000 000
Tera	**T**	10^{12}	Billion	1 000 000 000 000
Giga	**G**	10^{9}	Milliarde	1 000 000 000
Mega	**M**	10^{6}	Million	1 000 000
Kilo	**k**	10^{3}	Tausend	1 000
Hekto	**h**	10^{2}	Hundert	100
Deka	**da**	10^{1}	Zehn	10
Dezi	**d**	10^{-1}	Zehntel	0,1
Zenti	**c**	10^{-2}	Hundertstel	0,01
Milli	**m**	10^{-3}	Tausendstel	0,001
Mikro	μ	10^{-6}	Millionstel	0,000 001
Nano	**n**	10^{-9}	Milliardstel	0,000 000 001
Piko	**p**	10^{-12}	Billionstel	0,000 000 000 001
Femto	**f**	10^{-15}	Billiardstel	0,000 000 000 000 001
Atto	**a**	10^{-18}	Trillionstel	0,000 000 000 000 000 001

Bemerkungen:

- Die Kumulation von Vorsatzzeichen ist verboten (z.B.: Megazentimeter)
- Die Vielfachen der Basiseinheit Kilogramm werden mit der Bezeichnung "Gramm" (g) oder für 1000 Kilogramm und darüber mit der Bezeichnung "Tonne" (**t**) gebildet (z.B. μg, **Mt**)

[a] Die Begriffe Quadrillion,Trillion und Billion werden im Amerikanischen anders bezeichnet

1.5 Zahlensysteme

Im Laufe der Geschichte wurden verschiedene Zahlendarstellungssysteme und Rechensysteme entwickelt. Die bekannteste ist wahrscheinlich das Zahlensystem der Römer. Dabei handelt sich um ein sogenanntes Additionssystem, das bedeutet ,dass ein Zeichen in einem Zahlwort des Zahlensystems immer den gleichen Wert hat, unabhängig von seiner Stellung im Zahlwort. Diese Eigenschaft ist der Hauptgrund dafür, dass dieses System zur Multiplikation, Potenzierung und zum Rechnen mit großen Zahlen völlig ungeeignet ist. Das Alphabet für die Zahlworte des römischen Zahlensystems , werden in Grundzeichen und Hilfszeichen[8] eingeteilt.Der Wert eines Zahlworts ergibt sich aus der Summe der Werte der Zeichen, die in dem Zahlwort enthalten sind.

[8] Die Hilfszeichen sind historisch später zur Vereinfachung von Zahlwörtern eingeführt worden.

Grundzeichen		**Hilfszeichen**	
Zeichen	Wert	Zeichen	Wert
M	1000	**D**	500
C	100	**L**	50
X	10	**V**	5
I	1		

Beispiel:

- 26= XXVI
- 4=IIII (Grundzeichen) oder IV (mit Hilfszeichen)
- 213= CCXIII
- 1965= MCMLXV
- 9876= MMMMMMMMMDCCCLXXVI

In diesem Abschnitt wollen wir uns nicht mit den historischen Zahlensystemen beschäftigen. Wir interessieren uns eher für Systeme, die wir heute noch verwenden. Die meisten unserere Systeme basieren auf der Zahl Zehn, was sich durch das Abzählen mit unseren zehn Fingern erklären lässt. Dieses System wird als Dezimalsystem bezeichnet *(lat.decimus:der Zehnte).* In vielen alltäglichen Situationen tauchen aber unbewusst andere Zahlensysteme auf wie zum Beispiel:

- Das **Duodezimalsystem (12er System)** : Uhrscheibe, 12 Monate im Jahr
- Das **Quadrovigesimalsystem/Tetravigesimalsystem (24er System)** : 1 Tag = 24 Stunden
- Das **exagesimalsystem/Sexagesimalsystem(60er System)** : 1Stunde = 60 Minuten

Zahlensysteme werden im Allgemeinen verwendet, Zahlen auf verschiedene Arten darzustellen . Der Computer verwendet zum Beispiel Binärzahlen [9] zur Speicherung von Daten.

In unserem Dezimalsystem werden zur Darstellung von Zahlen die Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ verwendet. Der Wert einer Ziffer hängt von ihrer Stelle ab. Die erste 9 in der Zahl 98859 hat einen anderen Wert als die 9 in der letzten Stelle. Der Grund dafür ist, dass im Dezimalsystem jede Stelle einer Potenz der 10 entspricht. Jede Zahl lässt sich also als Kombination aus den Vielfachen der entsprechenden Zehnerpotenzen schreiben.

Beispiel:

Zahl	$\mathbf{10^4}$	$\mathbf{10^3}$	$\mathbf{10^2}$	$\mathbf{10^1}$	$\mathbf{10^0}$
11258	1	1	2	5	8
5689	0	5	5	8	9

Die Zahl **11258** kann also als Kombination der Zehnerpotenzen in folgender Form geschrieben werden:

$$\mathbf{1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0}$$

Analog ghet man vor bei 5689:

$$\mathbf{5689 = 5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0}$$

[9] Zahlen in der Binärdarstellung

Bei der Konstruktion weiterer Zahlensysteme geht man analog vor. Der einzige Unterschied ist, dass in anderen Systemen nicht die Zahl 10 als Basis dient, sondern eine andere. Im Binärsystem dient 2 als Basis und bei der Zahlendarstellung werden die Potenzen von 2 betrachtet.Dabei wird jede Zahl aus den Ziffern 0 und 1 gebildet. Bevor wir ein Beispiel zur Binärdarstellung geben, fassen wir die Potenzen der 2 in einer Tabelle zusammen.

Potenzen der 2	**Wert**
$\mathbf{2^0}$	1
$\mathbf{2^1}$	2
$\mathbf{2^2}$	4
$\mathbf{2^3}$	8
$\mathbf{2^4}$	16
$\mathbf{2^5}$	32
$\mathbf{2^6}$	64
$\mathbf{2^7}$	128
$\mathbf{2^8}$	256
$\mathbf{2^9}$	514
$\mathbf{2^{10}}$	1024
$\mathbf{2^{11}}$	2048

Nach all diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage , Zahlen aus dem Dezimalsystem ins Binärsystem umzuwandeln. Bevor wir aber ein konkretes Beispiel angehen , wollen wir die Vorgehensweise allgemein skizzieren:

1. Betrachte die Potenzen der Zahl die als Basis dient und wähle die Größte aus, die in der zur darstellenden Zahl enthalten ist.

2. Ziehe den Wert der jeweiligen Potenz von der Ausgangszahl ab

3. Gehe bei der neu entstandenen Zahl analog, wie bei der ursprünglichen Zahl vor, solange kein Rest mehr entsteht

Beispiel:
Gebe die Binärdarstellung der Zahl 397 an!

Zahl	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
397	1	1	0	0	0	1	1	0	1

397 kann also als $1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ geschrieben werden.
Die Binärdarstellung von 397 ist deswegen 110001101*(bin)*

Erklärung: Die größte Potenz von 2 die in 397 enthalten ist , ist 256 also 2^8. 256 ist in 397 also einmal enthalten und wir schreiben eine**1** als erste Stelle unserer Binärdarstellung
Jetzt betrachten wir die nächstkleinere Potenz von 2 und schauen , ob sie in $397 - 256 = 141$ *Rest* enthalten ist.
Die nächstkleinere Potenz ist klarerweise 2^7 und sie ist einmal in 141 enthalten und wir schreiben an die zweite Stelle in der Binärdarstellung auch eine **1**
Da 128 in 141 enthalten war , müssen wir wieder den Rest (13) betrachten
2^6 ist in 13nicht enthalten. Die nächste Stelle in der Darstellung wird also mit einer **0** besetzt
Da im letzten Schritt unsere Zahl unverändert blieb, betrachten wir wieder die Zahl 13 und schauen, ob sie 2^5 enthält. Da dies nicht der Fall ist, schreiben wir an die nächste Stelle der Binärdarstellung wieder eine **0**
2^4 ist in 13 auch nicht enthalten, es folgt also wieder eine **0**
2^3 ist in 13 aber sehr wohl enthalten und wir können wieder eine **1** in unsere Darstellung schreiben
2^2 ist in $13 - 2^3 = 5$ enthalten , das heißt es folgt wieder eine **1**
Jetzt betrachten wir die Zahl $5 - 2^2 = 1$. Da 2^1 nicht in 1 enthalten ist, folgt wieder eine **0**
2^0 ist in 1 genau einmal enthalten und es bleibt kein Rest übrig. Damit sind wir am Ende der Rechnung und können an die letzte Stelle der Binärdarstellung eine 1 einfügen.

Lesen wir die Ziffer 1 und 0 nach dem oben Berechneten schön der Reihe nach zusammen, so erhält man die gewünschte Binärdarstellung.

Als Abschluss dieses kurzen Abschnittes zu den Zahlensystemen wollen wir noch ein Beispiel dafür zu geben, wie man Zahlen aus dem Dezimalsystem ins Oktalsystem umwandelt. Das **Oktalsystem** *(von lateinisch octo "acht")* ist ein Stellenwertsystem mit der Basis 8 (daher auch Achtersystem genannt). Zur Darstellung von Zahlen werden die Ziffer **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7** verwendet.
Oktalzahlen finden vor allem in der Computertechnik Anwendung.Das Oktalsystem eignet sich zur Darstellung computerinterner Werte, da die Zahl 8 eine direkte zweier Potenz darstellt und somit mit der internen binären Rechenweise von Computer harmoniert.

Zur Hilfe geben wir wieder eine Tabelle mit einigen Potenzen der Zahl 8:

Potenzen der 8	**Wert**
8^0	1
8^1	8
8^2	64
8^3	512
8^4	4096
8^5	32768
8^6	262144

Beispiel:
Gebe die Oktaldarstellung der Zahl 2387 an!

Zahl	8^4	8^3	8^2	8^1	8^0
2387	0	4	5	2	3

2387 kann also als $4 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0$ geschrieben werden
Die Oktaldarstellung von 2387 lautet also 4523*(oct)*

Erklärung:

1. Die größte Potenz der Zahl 8, die in 2387 enthalten ist, ist 512 also 8^3. Diese ist sogar **viermal** in 2387 enthalten. $2387 - 4 \cdot 512 = 339$.⇒ Wir schreiben eine **4**
2. In 339 ist 8^2 **fünfmal** enthalten. $339 - 5 \cdot 8^3 = 339 - 5 \cdot 64 = 19$.⇒ Wir schreiben eine **5**
3. 8^1 ist in 19 **zweimal** enthalten. $19 - 2 \cdot 8 = 3 \Rightarrow$ Wir schreiben eine **2**
4. In 3 ist 8^0 **dreimal** enthalten. Zieht man $3 \cdot 8^0$ also 3 von 3 ab, so bleibt kein Rest übrig und wir können an die letzte Stelle unserer Darstellung eine **3** schreiben.
5. Schreiben wir die berechneten Ziffer in absteigender Ordnung nebeneinander, so erhalten wir die gewünschte Oktaldarstellung der Zahl.

1.6 Aufstellen und Interpretieren von Formeln

Eine der wichtigsten Aufgaben der Mathematik besteht darin, den Menschen klarzumachen, wie man alltäglich Prozesse mit Formeln beschreiben kann, beziehungsweise wie die verwendeten Formeln zu interpretieren sind. In diesem Abschnitt werden wir erklären, wie man Formeln aufstellen kann und was man aus Formeln herauslesen kann.

Beispiel:
Eine Schulkalsse aus Sopron, bestehend aus k Personen fährt mit dem Zug nach Budapest ins Theater. Der Fahrpreis mit einem Regionalzug beträgt M Forint pro Person. Will man die Fahrkarte erst im Zug kaufen, so hat man 500 mehr Forint bezahlen. Eine andere Möglichkeit ist, die Strecke Sopron-Budapest mit dem Intercity-Zug zu fahren, dann hat man aber einen Zuschlag von Z Forint zu bezahlen. Stelle eine Formel für den Gesamtpreis der Gruppe auf, wenn
a.) alle mit dem Regionalexpress fahren,
b.) alle mit dem Regionalexpress fahren, 5 Personen die Karte erst im Zug kaufen,
c.) ein Drittel der Klasse mit dem Regionalexpress und der Rest mit dem Intercity-Zug fährt,
d.) 7 Personen nicht fahren können und der Rest mit dem Intercity-Zug fährt.

ad a.):
Die Klasse besteht aus k Personen und jede von ihnen muss die Karte kaufen. Da die Fahrkarte mit dem Regionalexpress M Forint pro Person kostet, beträgt der Gesamtpreis $\boldsymbol{k \cdot M}$ Forint .
ad b.):
Die Denkweise ist ähnlich wie beim Teil a.) . Alle Schüler fahren mit. Das sind laut Angabe k Stück. Alle kaufen sich eine Karte um M Forint. Somit haben wir schon einen Preis von $\boldsymbol{k \cdot M}$ Forint. Es gibt aber 5 Schüler , die die Karte erst im Zug kaufen und haben deswegen jeweils 500 zusätzlich zu den M Forint zu bezahlen. $5 \cdot 500$ Forint =2500 Forint. Der Gesamtfahrpreis der Gruppe beträgt also $\boldsymbol{k \cdot M + 2500}$ Forint.
ad c.):
Ein Drittel der Klasse sind genau$\boldsymbol{\frac{k}{3}}$ Personen. Diese fahren mit dem Regionalexpress. Für sie kostet die Karte M Forint. Die Schüler, die mit dem Regionalexpress fahren , müssen also insgesamt $\boldsymbol{\frac{k}{3} \cdot M}$ Forint für die Fahrkarten ausgeben.
Der Rest der Klasse fährt mit dem Intercity . Das sind genau $\boldsymbol{\frac{2}{3} \cdot k}$ Schüler. Jeder von Ihnen muss für die Karte M Forint ausgeben, außerdem haben sie noch einen Zuschlag von Z Forint zu bezahlen.Für die , die mit dem Intercity fahren kostet die Fahrt $\boldsymbol{M + Z}$ Forint . Da $\boldsymbol{\frac{2}{3} \cdot k}$ Schüler mit dem Intercity fahren beträgt der Preis , den sie für die Karten zu bezahlen haben $\boldsymbol{\frac{2}{3} \cdot k \cdot (M + Z)}$ Forint.
Der Gesamtpreis der Klasse beträgt also $\boldsymbol{\frac{k}{3} \cdot M + \frac{2}{3} \cdot k \cdot (M + Z)}$ Forint.
ad d.):

Wenn 7 Personen nicht mitfahren können, fahren nur $\boldsymbol{k - 7}$ Personen nach Budapest. Sie zahlen jeweils $\boldsymbol{M + Z}$ Forint für die Karten . Der Gesamtpreis der Gruppe beträgt also $\boldsymbol{(k - 7) \cdot (M + Z)}$ Forint.

Die Klasse aus dem obigen Beispiel ist nach Budapest angekommen. Im Theater kostet die Karte für den Begleilehrer p Forint, und für jeden der k Jugendlichen r Forint. Was bedeuten folgende Ausdrücke?
a.)$\boldsymbol{k \cdot r}$
b.) $\boldsymbol{k \cdot r + p}$
c.)$\boldsymbol{\frac{k \cdot r + p}{k+1}}$

ad a.):
Es sind insgesamt k Jugendliche mitgefahren und sie zahlen für die Eintrittskarte jeweils r Forint. Das heißt, der **Gesamtpreis der Jugendliche für den Theaterbesuch** beträgt $\boldsymbol{k \cdot r}$ Forint.
ad b.):
Aus a.) wissen wir, dass der Term $k \cdot r$ für den Gesamtpreis der Jugendliche steht. Der Lehrer muss aber auch p Forint für die Karte zahlen. Das heißt **der Gesamtpreis der Klasse mit dem Lehrer** beträgt $\boldsymbol{k \cdot r + p}$ Forint
. **ad c.):**

Mit dem Lehrer gehen insgesamt $k+1$ Personen ins Theater. Ihre Eintrittskarten kosten insgesamt $\boldsymbol{k \cdot r + p}$ Forint. Dividieren wir diesen Preis durch $k+1$, so erhalten wir , **wie viel eine Person im Durchschnitt für die Karte zahlen muss**.

In vielen Textaufgaben kommen auch Prozente vor. Um solche Aufgaben auch bewältigen zu können , müssen wir unsere Grundkentnisse im Bereich der Prozentrechnung auffrischen.

Ein Prozent ist ein Hundertstel $\overset{\textit{In Zeichen}}{\Rightarrow}$ $\mathbf{1\% = 0,01 = \frac{1}{100}}$

Analog kann man auch **a.) 17% b.) 86% c.) 142% d.) 0,55%** usw. berechnen.

ad a.):

$$17\% = 17 \cdot 1\% = 17 \cdot 0,01 = 0,17 = \frac{17}{100}$$

ad b.):

$$86\% = 86 \cdot 1\% = 86 \cdot 0,01 = 0,86 = \frac{86}{100}$$

ad c.):

$$142\% = 142 \cdot 1\% = 142 \cdot 0,01 = 1,42 = \frac{142}{100}$$

ad d.):

$$0,55\% = 0,55 \cdot 1\% = 0,55 \cdot 0,01 = 0,0055 = \frac{55}{10000}$$

a % b ist $\boldsymbol{\frac{a}{100}}$ von b = $\boldsymbol{\frac{a}{100}}$·b

Beispiele:

- 2% von 700 : $\frac{2}{100} \cdot 700 = \frac{2 \cdot 700}{100} = \frac{1400}{100} = 14$
- 82% von 9600 :$\frac{82}{100} \cdot 9600 = \frac{82 \cdot 9600}{100} = \frac{787200}{100} = 7872$

Alle Prozentaufgaben beruhen einer einfachen Beziehung der Form $\boldsymbol{a\%}$ von $\boldsymbol{b}$ sind $\boldsymbol{c}$. In vielen Beispielen sind von den Zahlen $x,\ y,\ z$ zwei gegeben und die dritte ist gesucht. Abhängig von der gesuchten Zahl ergeben sich drei verschiedene Aufgabentypen.

Beispiele:

Typ I.:

Von den 500 Schülern einer Schule sind 150 Raucher. Wie viel Prozent aller Schüler sind dies?

Überlegen wir uns, was wir berechnen wollen! Wir interessieren uns dafür, wie viel Prozent aller Schüler rauchen, also **wie viel Prozent von 500 sind 150.**
Wir haben also eine Gleichung $\boldsymbol{x\%\ von\ 500 = 150}$ zu lösen.

$\boldsymbol{x\%\ von\ 500}$ bedeutet $\boldsymbol{\frac{x}{100} \cdot 500}$

Aus der Angabe folgt: $\boldsymbol{\frac{x}{100} \cdot 500 = 150}$

$$\boldsymbol{\frac{500 \cdot x}{100} = 150}$$
$$\boldsymbol{5x = 150}$$
$$\boldsymbol{x = 30}(\%)$$

30% aller Schüler sind Raucher.

Typ II.:

Bei einer Führerscheinkontrolle wurde festgestellt, dass 2% von 750 kontrollierten Personen einen ungültigen Führerschein hatten. Wie viele Personen waren das?

Wir wollen also wissen, wie viele Personen 2% von 750 sind. Das heißt, wir haben die Gleichung $\boldsymbol{2\%}$ von $\boldsymbol{750 = x}$ zu lösen.

$$\boldsymbol{2\%}\text{ von }\boldsymbol{750 = x}$$
$$\boldsymbol{\frac{2}{100} \cdot 750 = x}$$
$$\boldsymbol{\frac{2 \cdot 750}{100} = x}$$
$$\boldsymbol{\frac{1500}{100} = x}$$
$$\boldsymbol{15 = x}$$

15 Personen hatten einen ungültigen Führerschein.

Typ III.:

Norberts Körpergröße beträgt 125$\%$ der Körpergröße von Jürgen. Norbert ist 200 cm groß. Wie groß ist Cornelia?

Wir bezeichnen die Körpergrößt von Franz mit **x**. Wir wissen aus der Angabe, dass **125% von x 200** cm sind.

$$\boldsymbol{125\%\ von\ x = 200}$$
$$\boldsymbol{1,25 \cdot x = 200}$$
$$\boldsymbol{x = 160}\ \text{(cm)}$$

Jürgen ist 160 cm groß.

Kapitel 2

Trigonometrie

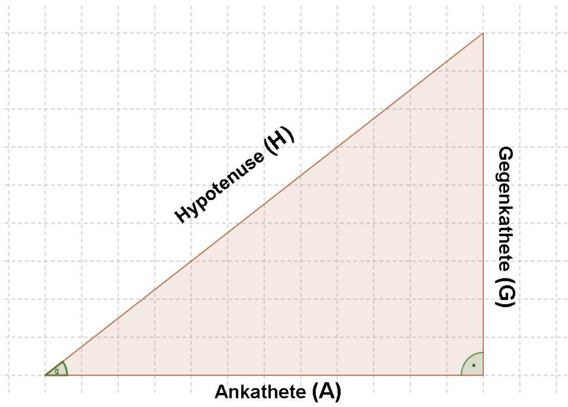


Abbildung 2.1: Rechtwinkeliges Dreieck

In diesem Kapitel werden wir uns hauptsächlich damit beschäftigen, wie man Seitenlängen und Winkelmaße mit Hilfe von Winkelfunktionen berechnen kann. Dabei werden wir uns in erster Linie auf Berechnungen in Dreiecken konzentrieren.

Stellen wir uns ein rechtwinkeliges Dreieck vor (siehe Abblidung oben)!
*Aus der Grundschule wissen wir bereits, dass ein rechtwinkeliges Dreieck zwei Katheten und eine Hypothenuse hat, wobei die Hypothenuse (Abkürzung:**(H)**) die Seite ist, die dem rechten Winkel gegenüberliegt. Ab jetzt werden wir bei der Bezeichnung der Seiten des Dreiecks immer Bezug auf einen Winkel nehmen.*

In rechtwinkeligen Dreiecken bezeichnen wir, die dem Winkel gegenüberliegende Kathete als **Gegenkathete von α** *(Abkürzung:**(G)**)*, die dem Winkel anliegende Kathete als **Ankathete von α** *(Abkürzung:**(A)**)* .

Bleibt der Winkel α unverändert , so ergeben die Verhältnisse $\frac{G}{H}$, $\frac{A}{H}$ und $\frac{G}{A}$ jeweils einen festen Wert. Da diese Verhältnisse im Laufe der Entwicklung der Mathematik eine sehr wichtige Rolle gespielt haben, hat man sie mit "Namen" versehen. Das Verhältnis $\frac{G}{H}$ wurde al **Sinus**, $\frac{A}{H}$ als Cosinus und $\frac{G}{A}$ als Tangens genannt.

<u>Definition:</u>
In einem rechtwinkeligen Dreieck, mit der Hypotenusenlänge **H**, der Gegenkathetenlänge **G**, der Ankathetenlänge **A** und dem Winkelmaß α definiert man:

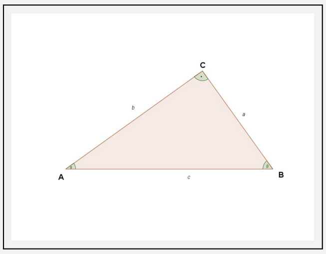
$$sin\ \alpha = \frac{G}{H} \quad cos\ \alpha = \frac{A}{H} \quad tan\ \alpha = \frac{G}{A}$$

2.1 Berechnungen in rechtwinkeligen Dreiecken

In diesem Abschnitt werden wir konkrete Beispiele mit Hilfe von sin, cos und tan lösen.

Beispiel1.:
Von einem rechtwinkeligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ kennt man die Seitenlängen $a = 5cm$ und $b = 12cm$. Berechne die Länge der fehlenden Seite und die Winkelmaße des Dreiecks!

Da der Winkel $\gamma = 90°$ ist, können wir uns sicher sein, dass es sich um ein rechtwinkeliges Dreieck handelt und wir mit sin, cos und tan rechnen können.



- Als Erstes berechnen wir , wie groß der Winkel α ist:
  Da wir α berechnen wollen, müssen wir uns im ersten Schritt entscheiden, welche der Winkelfunktionen ($sin\ cos$, tan) wir überhaupt verwenden können. Da der Winkel $\gamma = 90°$ ist, ist die Seite c die Hypotenuse des Dreiecks, die wir aber nicht gegeben haben. Wir suchen also die Winkelfunktion aus, zu derer Berechnung wir die Hypotenuse nicht brauchen. Die einzige mit dieser Eigenschaft ist tan.

  – Die Seite ***a*** liegt dem Winkel α gegenüber, sie ist also die Gegenkathete **G**
  – ***b*** kann dementsprechend nur die Ankathete **A** sein

  Nach all diesen Vorüberlegungen setzen wir einfach in die Formel ein:

  $$tan\ \alpha = \frac{G}{A} \Rightarrow tan\ \alpha = \frac{5}{12}$$

  Jetzt haben wir den Wert für $tan\ \alpha$. Wir interessieren uns aber dafür , wie groß der Winkel α ist. Um das zu berechnen, verwenden wir einen kleinen Trick. Wir geben in den Tachenrechner $\tan^{-1}\frac{5}{12}$ ein und erhalten dadurch den Wert für α . $(tan^{-1} = SHIFT + tan)$.

  $$tan^{-1}\frac{5}{12} = \alpha$$
  $$22,6198° = \alpha \qquad (\alpha \approx 22,62°)$$

- Da wir α bereits berechnet haben, können wir problemlos die Länge der Hypotenuse[a] berechnen

  $$sin\ \alpha = \frac{G}{H}$$

  α haben wir bereits berechnet und können jetzt einfach in die Formel einsetzen

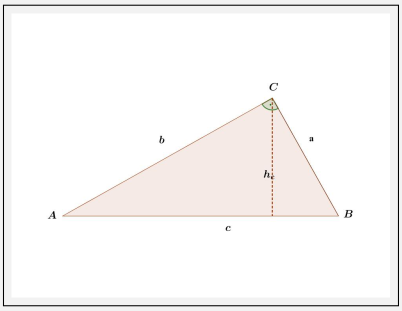
  $$sin\ 22,62 = \frac{5}{H} \ \Rightarrow\ H \cdot sin\ 22,62 = 5 \ \Rightarrow\ H = \frac{5}{sin\ 22,62} \ \Rightarrow\ H = 13$$

- $\beta = 180°$[b] $- (\alpha + \gamma) \ \Rightarrow\ \beta \approx 180 - (22,62 + 90)$
  $\beta \approx 67,38°$

[a] kann auch mit dem Lehrsatz des Pythagoras berechnet werden
[b] Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck ist 180°

Beispiel 2.:
Von einem rechtwinkeligen Dreieck mit $\boldsymbol{\gamma = 90°}$ *kennt man die Länge der Seite* $\boldsymbol{a = 8cm}$ *und die Höhe* [a] $\boldsymbol{h_c = 6,5cm}$.Berechne die übrigen Seitenlängen und all Winkelmaße des Dreiecks!

Es ist offensichtlich, dass die Höhe h_c das Dreieck in zwei kleinere, rechtwinkelige Dreiecke aufteilt. *Siehe auch in der Abbildung.* Jetzt betrachten wir also zwei Dreiecke. Nehmen wir Bezug auf den Winkel β, so stellen wir fest , dass die Höhe h_c als Gegenkathete aufgefasst werden kann. Da wir die Länge der Seite a, die im kleinen Dreieck als Hypotenuse gilt sowieso schon kennen, können wir mit sin rechnen:



$$sin\ \beta = \frac{G}{H} \overbrace{\Rightarrow}^{Einsetzen} sin\ \beta = \frac{6,5}{8}$$
$$sin^{-1}(\frac{6,5}{8}) = \beta$$
$$\beta \approx 54,34°$$

Da wir schon die Winkel γ und β kennen, können wir den Winkel α sehr leicht berechnen:

$$\alpha = 180 - (\beta + \gamma) \overbrace{\Rightarrow}^{Einsetzen} \alpha = 180 - (54,34 + 90)$$
$$\alpha = 35,66°$$

Jetzt fehlen uns nunmehr die Seiten b und c. Wir beschäftigen uns zuerst die Seite b. Um diese berechnen zu können, wechseln wir zum anderen kleinen Dreieck *(also zum* $Dreieck_{AFC}$*, wobei F für den Fußpunkt der Höhe* h_c *steht.*
Wir nehmen Bezug auf den Winkel α und wollen die Seite b berechnen. Wir können sehr leicht einsehen, dass in diesem Dreieck die Seite b die Hypothenuse und die Höhe h_c die Gegenkathete ist. Da uns also **G** und $\boldsymbol{\alpha}$ zu Verfügung stehen, rechnen wir wieder mit Sinus:

$$sin\ \alpha = \frac{G}{H} \overbrace{\Rightarrow}^{Einsetzen} sin\ 35,66 = \frac{6,5}{b} \quad | \cdot b$$
$$b \cdot sin\ 35,66 = 6,5 \quad | : sin\ 35,66$$
$$b = \frac{6,5}{sin\ 35,66}$$
$$b \approx 11,15cm$$

Die fehlende Seite c berechnen wir mit dem Lehrsatz von Pythagoras:

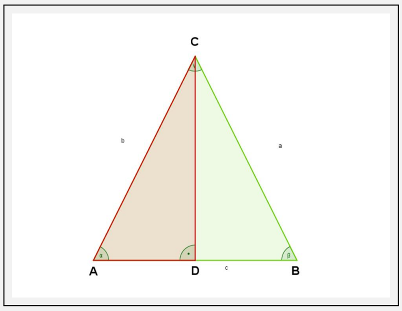
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$8^2 + 11,15^2 = c^2$$
$$64 + 124,32 = c^2$$
$$188,32 = c^2 \quad |\sqrt{}$$
$$c = \sqrt{188,32} \approx 13,723$$

[a] Fällt man von einem Eckpunkt eines beliebigen Dreiecks das Lot auf die gegenüberliegende Seite, so entsteht seine Höhe.

Beispiel 3.:

Von einem gleichschenkeligen Dreieck (a=b), kennt man $c = 8cm$ und $b = 9cm$. Wie groß sind die Winkelmaße des Dreiecks?

Wir müssen uns klar machen, dass ein gleichschenkeliges Dreieck durch die Höhe auf die Seite c in zwei rechtwinkelige Dreiecke aufgeteilt wird. Außerdem sollten wir in Erinnerung rufen , dass bei Dreiecken wie in der Angabe $\alpha = \beta$ gilt.



Betrachten wir zuerst das Dreieck$_{ADC}$! Es ist klar, dass die Länge der Strecke AD genau die Hälfte von der Länge der Seite c ist. Wir kennen also die Ankathete von α und die Hypotenuse. Genau mit diesen kann der Cosinus von α berechnet werden:

$$cos\ \alpha = \frac{A}{H} \overbrace{\Rightarrow}^{In\ diesem\ Bsp.} cos\ \alpha = \frac{\frac{c}{2}}{b}$$

$$cos\ \alpha = \frac{4}{9}$$

$$cos^{-1}\frac{4}{9} = \alpha$$

$$\alpha \approx 63,61°$$

$$\text{Da } \alpha = \beta \text{ gilt haben wir } \beta \approx 63,61°$$

Uns fehlt noch der Winkel γ:

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta) \Rightarrow \gamma = 180 - (63,61 + 63,61) \Rightarrow \gamma = 180 - 127,22$$

$$\gamma = 52,78°$$

Beispiel 4.:

Von einer Beobachtungsstation erscheint der Gipfel eines Berges unter einem Höhenwinkel von $24,78°$. Die Entfernung der Station von dem Gipfel wurde mit 8,83 km gemessen.
Wie hoch ist der Berg?

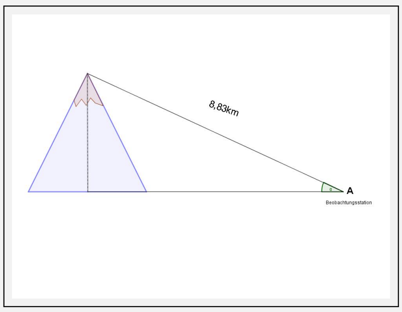
Diese Beispiel ist eher anwendungsorientiert, geht aber analog, wie die anderen, die wir bis jetzt gelöst haben. Es zahlt sich aus in diesem Beispiel auch eine Skizze zu zeichnen.

$$sin\ \alpha = \frac{A}{H} \overbrace{\Rightarrow}^{In\ diesem\ Beispiel} sin\ 24,78 = \frac{G}{8,83}$$

$$8,83 \cdot sin\ 24,78 = G$$

$$G \approx 3,7$$

Der Berg ist also 3,7 km hoch



2.1.1 Beziehungen zwischen Sinus , Cosinus und Tangens

In diesem sehr kurzen, theoretischen Abschnitt beschreiben wir die Zusammenhänge zwischen Sinus, Cosinus und Tangens .

Am Anfang dieses Kapitels haben wir **sin α , cos α und tan α für $0° < \alpha < 90°$ definiert.** Mit Hilfe dieser Definitionen können wir einige Zusammenhänge nachweisen.

Satz 4. *Für* $0° < \alpha < 90°$ *gilt:*

$$\boldsymbol{tan\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}}$$

Wir führen einen direkten Beweis und verwenden dabei einfach die Definitionen.

Beweis:. $\frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} \overbrace{=}^{per\ Definition} \frac{\frac{G}{H}}{\frac{A}{H}} = \frac{G}{H} : \frac{A}{H} = \frac{G}{H} \cdot \frac{H}{A} = \frac{G \cdot \cancel{H}}{A \cdot \cancel{H}} = \frac{G}{A} = tan\ \alpha$

$\square$

Satz 5. *Für* $0° < \alpha < 90°$ *gilt :*

$$\boldsymbol{sin\ (90 - \alpha) = cos\ \alpha}$$

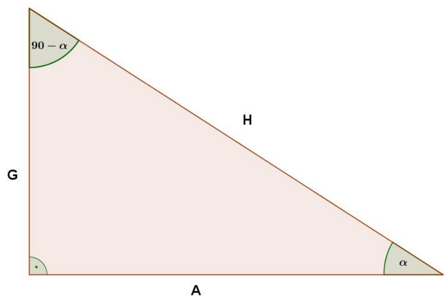


Abbildung 2.2: Hilfszeichnung zu den Sätzen 5. und 6.

Beweis:. $sin\ (90 - \alpha) \overbrace{=}^{per\ Definition} \frac{A}{H} = cos\ \alpha$ *Siehe Abbildung 2.2*

$\square$

Satz 6. *Für* $0° < \alpha < 90°$ *gilt :*

$$\boldsymbol{cos\ (90 - \alpha) = sin\ \alpha}$$

Beweis:. $cos\ (90 - \alpha) \overbrace{=}^{per\ Definition} \frac{G}{H} = sin\ \alpha$ *Siehe Abbildung 2.2*

$\square$

Satz 7. *Für* $0° < \alpha < 90°$ *gilt :*

$$sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$$

Beweis:. $sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha \overbrace{=}^{per\ Definition} \left(\frac{G}{H}\right)^2 + \left(\frac{A}{H}\right)^2 = \left(\frac{G^2}{H^2}\right) + \left(\frac{A^2}{H^2}\right) = \left(\frac{G^2+A^2}{H^2}\right) \overbrace{=}^{Pythagoras} \left(\frac{H^2}{H^2}\right) = 1$ □

2.2 Berechnungen in beliebgen Dreiecken

In diesem Abschnitt werden wir verschiedene Berechnungsmethoden kennenlernen, bei denen wir nicht mehr auf rechtwinkelige Dreiecke angewiesen sind. Am Ende dieses Unterkapitels werden wir also in der Lage sein , Berechnungen in allgemeinen Dreiecken durchzuführen.

2.2.1 Die trigonometrische Flächenformel

Elementare Methoden zu Berechnung von Flächeninhalten kennen wir bereits aus der Grundschule. In diesem Abschnitt wollen wir eine neue Methode der Flächenberechnung einführen.

Leiten wir also die trigonometrische Flächenformel her!

1. Betrachten wir das Dreieck $_{ABC}$, von dem wir den Winkel γ und die Seiten a und b kennen:

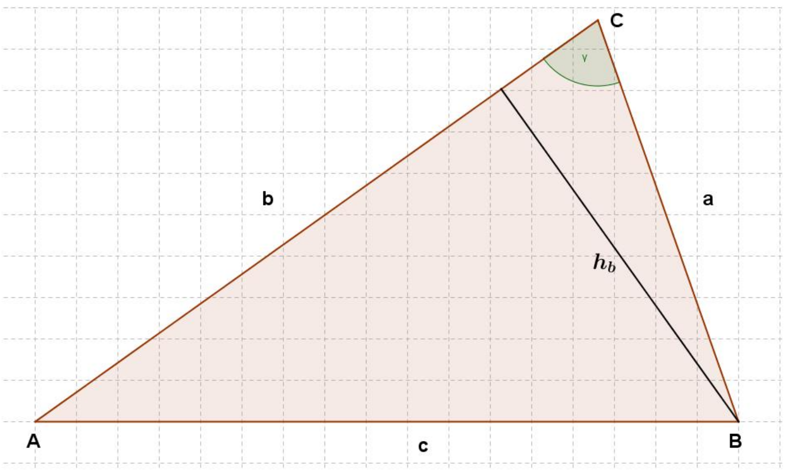


Abbildung 2.3: Allgemeines Dreieck mit h_b

2. Nach unserer Definition für Sinus kann $sin\ \gamma$ wie folgt berechnet werden:

$$sin\ \gamma = \frac{h_b}{a}$$

3. Nach elementaren Umformungen erhalten wir:

$$h_b = a \cdot sin\ \gamma$$

4. Verwenden wir die Flächenformel aus der Grundschule!

$$A = \frac{b \cdot h_b}{2} \overbrace{=}^{\text{Einsetzen von oben!}} \frac{b \cdot a \cdot sin\ \gamma}{2}$$

5. Analoge Rechnung kann auch mit den Höhen h_a und h_c geführt werden.

Satz 8. ***Trigonometrische Flächenformel für Dreiecke:***

$$A = \frac{a \cdot b \cdot sin\ \gamma}{2} = \frac{a \cdot c \cdot sin\ \beta}{2} = \frac{b \cdot c \cdot sin\ \alpha}{2}$$

Beispiel:

Von einem Dreieck kennen wir folgende Bestimmugsstücke: $a = 6$, $b = 4$ und $\gamma = 30°$. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks!

$$A = \frac{a \cdot b \cdot sin\ \gamma}{2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot sin30}{2} = \frac{24 \cdot sin30}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt also 6 E^2 . *(wobei E allgemein für eine Einheit steht)*

2.2.2 Der Sinussatz

Vorbemerkungen:

1. Für alle Winkelmaße α mit $0° < \alpha < 360°$ gilt:
   $sin(180 - \alpha) = sin\ \alpha$
   $cos(180 - \alpha) = -cos\ \alpha$

   Es kann also vorkommen, dass bei einer Rechnung mehrere Ergebnisse richtig sind.

2. Sind von einem Dreieck zwei Seitenlängen und ein Winkel gegeben, der der längeren Seite gegenüberliegt, so gibt es nur eine Lösung.

3. Sind von einem Dreieck zwei Seitenlängen und ein Winkel gegeben, der der kürzeren Seite gegenüberliegt, so ist es möglich , dass zwei Lösungen existieren, der Fall dass es keine Lösung existiert kann aber auch nicht ausgeschlossen werden.

Satz 9. ***Der Sinussatz***
In jedem Dreieck gilt:

$$\frac{a}{sin\ \alpha} = \frac{b}{sin\ \beta} = \frac{c}{sin\ \gamma}$$

Beispiel:

Berechne die übrigen Seitenlängen und Winkelmaße sowie den Flächeninhalt des Dreiecks!
$a = 6$, $b = 3$, $\alpha = 40°$

Da der Winkel α der längeren Seite gegenüberliegt, gibt es nur eine Lösung. (*Siehe Bemerkung oben.*. Wir wenden den Sinussatz an!

$$\frac{a}{sin\ \alpha} = \frac{b}{sin\ \beta} \quad | \cdot sin\ \beta$$
$$\frac{a \cdot sin\ \beta}{sin\ \alpha} = b \quad | \cdot sin\ \alpha$$
$$a \cdot sin\ \beta = b \cdot sin\ \alpha \quad | : a$$
$$\frac{b \cdot sinlpha}{a} = \sin\beta \ \Rightarrow\ \beta = sin^{-1}(\frac{b \cdot sin\ \alpha}{a})$$

Werte einsetzen!

$$\beta = sin^{-1}\frac{8 \cdot sin\ 80}{10} \approx 51,985°$$

γ kann sehr schnell berechnet werden:

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta) \ \Rightarrow\ \gamma = 180 - (80 + 51,985$$
$$\boldsymbol{\gamma = 48,015°}$$

Wir müssen noch die Länge der Seite b berechnen. Dabei kommt wieder der Sinussatz zum Einsatz:

$$\frac{c}{sin\ \gamma} = \frac{a}{\sin\ \alpha} \quad | \cdot \sin\ \gamma$$
$$c = \frac{a \cdot sin\ \gamma}{sin\ \alpha}$$
$$c = \frac{10 \cdot sin\ 48{,}015}{sin 80}$$
$$c = 8$$

2.2.3 Der Cosinussatz

Wir haben bereits eine Methode kennegelernt, mit der wir Berechnungen in beliebigen Dreiecken durchführen können. In diesem abschließenden Abschnitt des zweiten Kapitels besprechen wir einen Satz, der uns bei Berechnungsaufgaben in beliebigen Dreiecken sehr hilfreich sein kann.

Satz 10. ***Der Cosinussatz***
In jedem Dreieck gilt:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ \alpha}$$
$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\ \beta}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\ \gamma}$$

Jetzt stellet sich natürlich die Frage, wie wir diese Formel herleiten können.

Stellen wir uns ein Dreieck vor, von dem wir b, c und α kennen. Mit Hilfe dieser Daten versuchen wir eine Formel für die Seite a aufzustellen. Bevor wir aber die Rechnung angehen, müssen wir uns klarmachen , dass in diesem Beispiel der Sinussatz nicht angewendet werden kann. Wir greifen daher auf rechtwinkelige Dreiecke zurück, die wir erhalten, indem wir die Höhe h_c auf die Seite c einzeichnen. *Siehe: Abbildung 2.4*

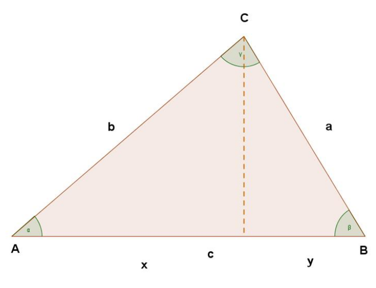


Abbildung 2.4: Allgemeines Dreieck mit h_c

Wir haben unser Dreieck also in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Da die Höhe in beiden eine Kathete ist , berechnen wir im ersten Schritt diese.

Nehmen wir Bezug auf den Winkel α!

Offensichtlich gilt:

$$\boldsymbol{sin\ \alpha \quad \overbrace{=}^{Definition\ von\ Sinus} \quad \frac{h}{b} \overbrace{\Rightarrow}^{|\cdot b} b \cdot sin\ \alpha = h}$$

Da wir neue Variablen x und y eingeführt haben *(siehe: Abbildung 2.4)*, wollen wir für diese auch eine Formel aufstellen :

$$\boldsymbol{cos\ \alpha \overbrace{=}^{Definition\ von\ Cosinus} \frac{x}{b} \overbrace{\Rightarrow}^{|\cdot b} b \cdot cos\ \alpha = x}$$
$$\boldsymbol{y = c - x \underbrace{=}_{x=b\cdot\ cos\alpha\ einsetzen} c - b \cdot cos\ \alpha}$$

Jetzt können wir einfach den Lehrsatz von Pythagoras anwenden:

$$\boldsymbol{a^2 = h^2 + y^2}$$
$$\boldsymbol{a^2 = (b \cdot sin\ \alpha)^2 + (c - b \cdot cos\ \alpha)^2}$$
$$\boldsymbol{a^2 = b^2 \cdot sin^2\ \alpha + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ \alpha + b^2 \cdot cos^2\ \alpha}$$
$$\boldsymbol{a^2 = b^2(sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha) + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ \alpha}$$

Wir wissen bereits,dass $(sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha) = 1$ gilt.

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ \alpha}$$

Somit haben wir also unsere gewünschte Formel erhalten, die wir allgemein als Cosinussatz bezeichnen. Beim Aufstellen der übrigen zwei Formeln können wir analog vorgehen.

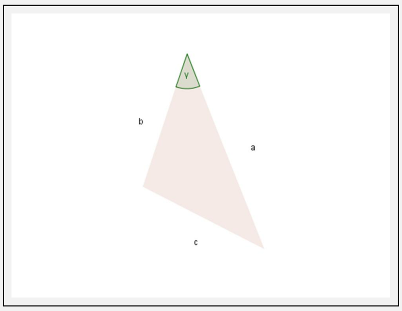
Im Falle von rechtwinkligen Dreiecken ist der Lehrsatz von Pythagoras ein Spezialfall von dem Cosinussatz.

Beispiel:

Von einem Dreieck kennen wir die Bestimmungsstücke $a = 6$, $b = 4$ und $\gamma = 40°$. Berechne c, α und β!

Da wir "nur" a, b und γ kennen, zeigt sich der Sinussatz ungeeignet zum Lösen dieses Beispiels. Wir müssen also den Cosinussatz anwenden. Wegen den bekannten Bestimmungsstücken arbeiten wir mit der Formel :

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\ \gamma}$$



Setzten wir also einfach in die Formel ein!

$$\boldsymbol{c^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot cos\ 40}$$
$$\boldsymbol{c^2 = 36 + 16 - 48 \cdot cos\ 40}$$
$$\boldsymbol{c^2 = 52 - 48 \cdot cos\ 40}$$
$$\boldsymbol{c^2 \approx 15,23} \ |\sqrt{}$$
$$\boldsymbol{c \approx 3,9}$$

Zur Berechnung der fehlenden Winkelmaße kann sowohl der Cosinus- als auch der Sinussatz angewendet werden.Wir rechnen aber mit dem Cosinussatz weiter:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ \alpha}$$
$$6^2 = 4^2 + 3,9^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3,9 \cdot cos\ \alpha$$
$$36 = 16 + 15,21 - \ 31,2 \cdot cos\ \alpha$$
$$36 = 31,21 - 31,2 \cdot cos\ \alpha$$
$$4,79 = -31,2 \cdot cos\ \alpha$$
$$\frac{4,79}{-31,2} = cos\ \alpha$$
$$cos^{-1}(\frac{4,79}{-31,2}) = \alpha$$
$$\alpha \approx 98,83°$$

Im letzten Schritt müssen wir noch β berechnen:

$$\beta = 180 - (\alpha + \gamma) = 180 - (98,83 + 40) = 41,17$$
$$\boldsymbol{\beta = 41,17°}$$

Kapitel 3

Gleichungen und Gleichungssysteme

Gleichungen und Gleichungssysteme spielen sowohl in der reinen Mathematik als auch im Alltag eine sehr wichtige Rolle. Mit ihnen kann man Naturprozesse beschreiben, sie ermöglichen auch die Optimierung vieler Produktionsvorgänge in der Wirtschaft und sie geben uns allgemein die Möglichkeit unbekannte Größen zu bestimmen.

Eine Gleichung kann als eine logische Aussage angesehen werden. Sie nimmt der "Wert" *wahr* an, wenn die Unbekannte die Gleichheit erfüllt, sonst wird der "Wert" *falsch* angenommen.

3.1 Lineare Gleichungen

In diesem Unterkapitel werden wir uns mit **linearen Gleichungen**, also mit Gleichungen der Form $\boldsymbol{a \cdot x + b = 0}$ beschäftigen. Diese besitzen immer genau eine eindeutig bestimmte Lösung, die die Form $\boldsymbol{x = -\frac{b}{a}}$ hat. Wollen wir Gleichungen von dieser "Bauart" lösen, so stehen uns mehrere Methoden zu Verfügung. Die oft am einfachsten erscheinende Methode ist die Gleichung als **lineare Funktion** aufzufassen und und die Lösung einfache ablesen. Wir betrachten also eine Funktion $f(x) = a \cdot x + b$. Diese hat die Steigung a und schneidet die y-Achse im Punkt $(0; b)$. Die Lösung $x = -\frac{b}{a}$ der Gleichung ist genau die Nullstelle der Funktion $f(x)$.

Schauen wir uns ein **Beispiel** an!
Wir wollen die Gleichung $2 \cdot x - 3 = 0$ graphisch lösen.
Dazu müssen wir die Gleichung als Funktion auffassen. Wir betrachten also die Funktion $f(x) = 2 \cdot x - 3$. Der Graph von dieser ist eine Gerade, die die y-Achse im Punkt $(0; -3)$ schneidet und die Steigung[1] 2 hat. Die Lösung der Gleichung ist die Nullstelle der Funktion $f(x)$, also die Stelle , wo der Funktionsgraph die x-Achse schneidet *(Siehe unten).*

Wollen wir diese Gleichung rechnerisch lösen, so brauchen wir nur eine einfache Umformung zu machen:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{2 \cdot x - 3 = 0} \mid +3 \\ \boldsymbol{2 \cdot x = 3} \mid :2 \\ \boldsymbol{x = \tfrac{3}{2}}\end{gathered}$$

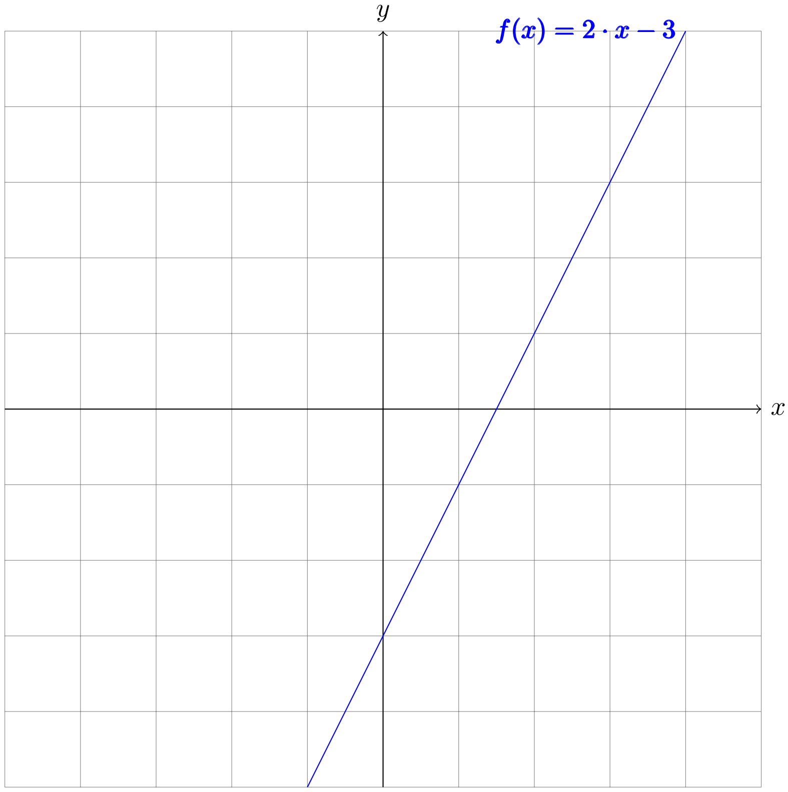
Diese Lösung erhalten wir auch , wenn wir den Graphen betrachten!

Die graphische Lösung ist zwar sehr einfach und anschaulich hat aber enorme Nachteile:

- Die Lösung kann nicht immer eindeutig abgelesen werden

- Bei sehr großen Zahlen ist es schwer ein entsprechendes Koordinatensystem zu zeichnen

[1] Die Steigung zwei ist wie folgt zu verstehen: wird der x-Wert um 1 größer, so wird der zugehörige y-Wert um 2 größer. Beim Zeichnen geht man von dem Schnittpunkt mit der y-Achse eine Einheit in die positive x-Richtung *(also nach rechts)* und 2 Einheiten hinauf *(in die positive y-Richtung).*



Im Allgemeinen werden wir versuchen beim Lösen von Gleichungen ohne die graphische Lösungsmethode auszukommen. Da aber die Graphen sehr anschaulich sind und uns als Kontrolle dienen können, werden wir sie meistens angeben.

Im folgenden geben wir weitere Beispiele zur rechnerischen und graphischen Lösung von einfachen linearen Gleichungen.

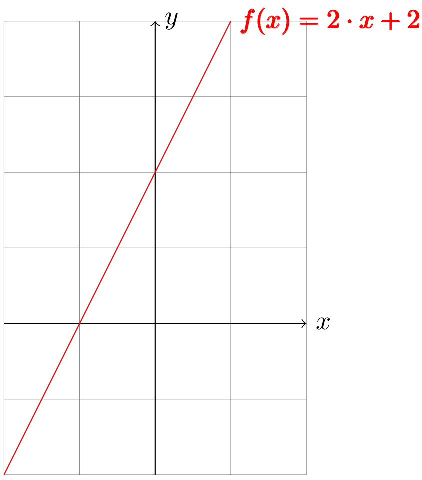
Beispiel:

$$2x + 2 = 0$$

Wir lösen diese Gleichung zuerst rechnerisch[2]:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 \mid -2 \\ 2x &= -2 \mid : 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

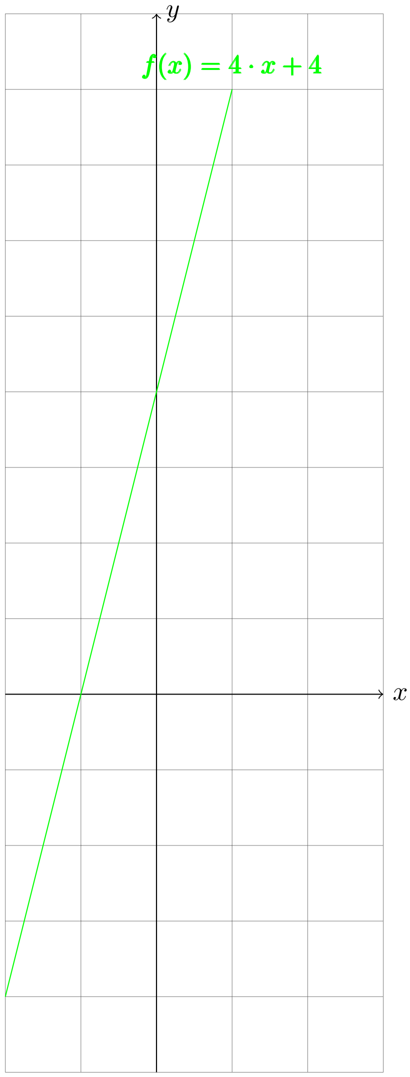
Beim Rechnen formen wir die Gleichung so um, dass auf einer Seite des Gleichheitszeichens[3] die Unbekannte , nach der wir die Gleichung auflösen, und auf der anderen Seite eine Zahl steht.



[2]Wir könnten auch sagen, dass wir die Gleichung nach x auflösen.
[3]Das Gleichheitszeichen wurde von dem deutschen Mathematiker **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) eingeführt.

Beispiel:

$$4x + 20 = 16 \mid -20 \quad \text{Um die Gleichung auf die Form } a \cdot x + b = 0 \text{ zu bringen.}$$
$$4x + 4 = 0 \mid -4$$
$$4x = -4 \mid : 4$$
$$x = -1$$



Beispiel:

$$2x - 6 = 9 - x$$

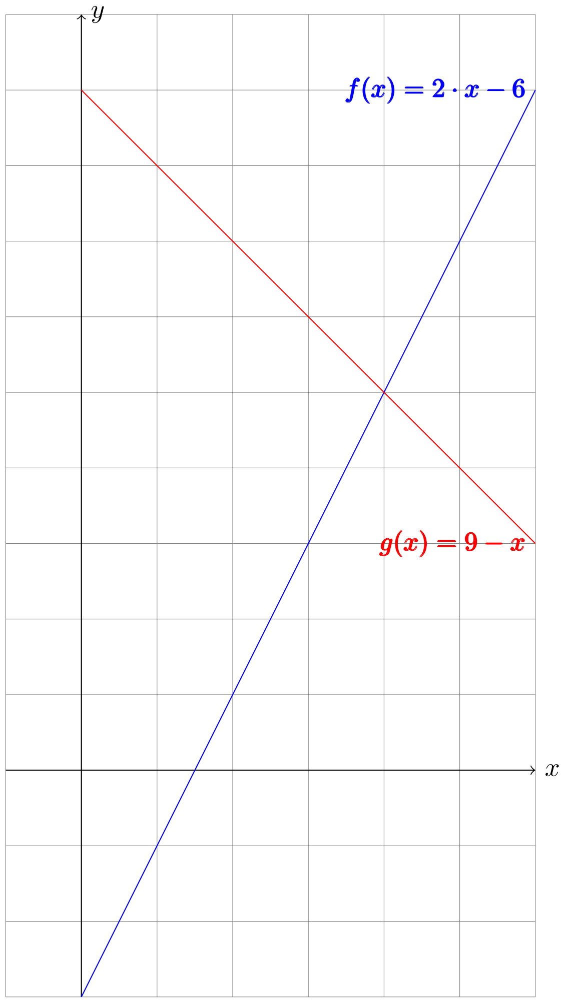
Eine Möglichkeit beim graphischen Lösen dieses Beispiels ist , sowohl die rechte, als auch die linke Seite der Gleichung als Funktion aufzufassen und beide in einem Koordinatensystem darzustellen. Die Lösung der Gleichung ist dann der Schnittpunkt der Graphen.

Die andere Möglichkeit wäre, die Gleichung auf die allgemeine Form $a \cdot x + b = 0$ zu bringen und diese so zu lösen, wie in den obigen Beispielen
Die rechnerische Methode geht analog wie in den obigen Beispielen nach dem **Waagenprinzip**.

$$2x - 6 = 9 - x \mid +x$$
$$3x - 6 = 9 \mid +6$$
$$3x = 15 \mid : 3$$
$$x = 5$$

1.Lösungsmöglichkeit

$$\underbrace{2x-6}_{f(x)} = \underbrace{9-x}_{g(x)}$$



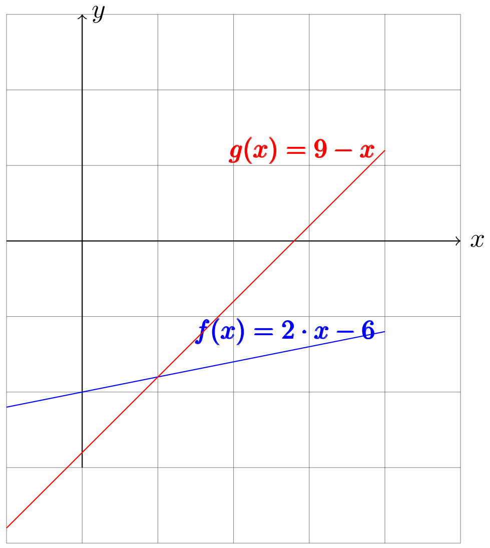
2.Lösungsmöglichkeit

$$2x - 6 = 9 - x$$
$$3x - 15 = 0$$

Analog zu den obigen Beispielen. Die Gerade $f(x) = 3x - 15$ schneidet die y-Achse im Punkt (0;-15) und hat die Steigung 3.

Beispiel:

$$\frac{1}{5} \cdot x - 2 = x - \frac{14}{5} \mid \cdot 5$$
$$x - 10 = 5x - 14 \mid + 14$$
$$x + 4 = 5x \mid - x$$
$$4 = 4x \mid : 4$$
$$1 = x$$



Bemerkung:

Die Darstellung von linearen Gleichungen mit einem Bruch vor der Variable x geht auch ganz einfach. Wir betrachten den Bruch, der vor x steht. Der Nenner des Bruches gibt an, wie viel wir in die positive x- Richtung *(nach rechts)* gehen müssen und der Zähler, wie viel wir in die y-Richtung gehen.

Satz 11. *Ein Produkt ist genau dann 0, wenn mindestens einer seiner Faktoren 0 ist*

Das nächste Beispiel schaut vielleich ganz abschreckend aus, kann aber besonders einfach gelöst werden.
Beispiel:

$$\boldsymbol{(x-3)(3x+15)(4x+28)(\tfrac{1}{2}x-11)(\tfrac{5}{4}x-14)=0}$$

Beim Lösen dieser Gleichung verwenden wir **Satz 11.** Offensichtlich haben wir mit einem Produkt zu tun, das aus 5 Faktoren besteht. Wir müssen alle Faktoren als eigenständige Gleichungen betrachten, und die wie folgt lösen[4]:

1. $(x-3)=0 \overbrace{\Rightarrow}^{+3} x=3$ Die erste Lösung lautet also $x_1=3$
2. $(3x+15)=0 \overbrace{\Rightarrow}^{-15} 3x=-15 \overbrace{\Rightarrow}^{:3} x=-5$ Die zweite Lösung lautet $x_2=-5$
3. $(4x+28)=0 \overbrace{\Rightarrow}^{-28} 4x=-28 \overbrace{\Rightarrow}^{:4} x=-7$ Die dritte Lösung lautet $x_3=-7$
4. $(\frac{1}{2}x-11)=0 \overbrace{\Rightarrow}^{+11} \frac{1}{2}x=+11 \overbrace{\Rightarrow}^{\cdot 2} x=5,5$ Die vierte Lösung lautet $x_4=5,5$
5. $(\frac{5}{4}x-14)=0 \overbrace{\Rightarrow}^{+14} \frac{5}{4}x=+14 \overbrace{\Rightarrow}^{\cdot 4} 5x=56 \overbrace{\Rightarrow}^{:5} x=\frac{56}{5}$ Die fünfte Lösung lautet $x_5=\frac{56}{5}$

Setzen wir eine der Lösungen $x_1,\ x_2, \ldots, x_5$ in die ursprüngliche Gleichung ein, so wird die Gleichheit erfüllt. Dies kann durch die Probe leicht eingesehen werden.

Im folgenden Beispiel versuchen wir eine Gleichung zu lösen, die von ihrer Bauart her ein bisschen komplizierter ist als die Beispiele , die wir bis jetzt gelöst haben. Der Leser möge auf den ersten Blick den Eindruck haben, dass man zuerst ausmultiplizieren soll und erst dann die Gleichung lösen kann. Da aber beim Ausmultiplizieren auch quadratische Terme auftauchen, würde das Lösen der Gleichung mit unseren jetztigen Kentnissen ein bisschen problematisch sein . Wenn wir aber die Gleichung genauer betrachten, erkennen wir, dass die Gleichung auf die selbe Form gebracht werden kann, wie im obigen Beispiel.

[4] Da die Faktoren unterschiedliche Lösungen haben können, werden wir sie mit Indizes versehen.

Beispiel:

$$\boldsymbol{(3x-7)(5x+8)-(2x+6)(3x-7)=(6x-14)(7x+1)}$$

Wir erkennen, dass jedes Glied den Ausdruck $(3x-7)$ enthält und wir schreiben die Gleichung , wie folgt um:

$$\boldsymbol{(3x-7)(5x+8)-(2x+6)(3x-7)=2(3x-7)(7x+1)} \quad \textit{Begründung:}\ 2(3x-7)=6x-14$$

Im nächsten Schritt ordnen wir die Gleichung so um, dass auf der rechten Seite 0 steht:

$$\boldsymbol{(3x-7)(5x+8)-(2x+6)(3x-7)-2(3x-7)(7x+1)=0}$$

Wir haben also die ganze rechte Seite subtrahiert.

Jetzt können wir $(3x-7)$ einfach herausheben :

$$\boldsymbol{(3x-7)[(5x+8)-(2x+6)-2(7x+1)]}$$

Anschaulich gesprochen haben wir also $(3x-7)$ nach vorne gezogen und alles andere unverändert gelassen.

Somit haben wir ein Produkt vor uns, und können wieder **Satz 11** anwenden, zuerst werden wir aber der unnötigen Klammerung los:

$$\boldsymbol{(3x-7)[5x+8-2x-6-14x-2]=0}$$

Steht ein Minuszeichen vor der Klammer, so bezieht sich diese auf alle Glieder innerhalb der Klammer!

Jetzt können wir die gleichartigen Terme zusammenfassen:

$$\boldsymbol{(3x-7)[-11x]=0}$$

Wegen **Satz 11** gilt:

$$\boldsymbol{3x-7=0} \text{ oder } \boldsymbol{-11x=0}$$

Mutatis mutandis erhalten wir $\boldsymbol{x_1=\frac{7}{3}}$ und $\boldsymbol{x_2=0}$

3.2 Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen

Definition:

Ein lineares Gleichungssystem in zwei Variablen hat die Form:

$$\begin{cases} a_1x+a_2y=a_0 & \text{mit } (a_1|a_2)\neq(0|0) \\ b_1x+b_2y=b_0 & \text{mit } (b_1|b_2)\neq(0|0) \end{cases}$$

Erfüllen $\boldsymbol{x,y\in\mathbb{R}}$ beide Gleichungen, so wird das Zahlenpaar $\boldsymbol{(x|y)}$ die Lösung des Gleichungssystems genannt.

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems stehen uns zahlreiche Verfahren zur Verfügung. Wir werden in diesem Abschnitt aber nur zwei von ihnen kennenlernen , die **Eliminationsmethode** und die **Substitutionsmethode**. Wie diese Verfahren/Methoden funktionieren, erklären wir anhand eines konkreten Beispiels: Betrachten wir das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x+2y=27 \\ 4x+3y=58 \end{cases}$$

Eliminationsmethode *(allgemein)*:

1. Je nach Gefallen, wählen wir uns eine der Variablen aus
2. Wir multiplizieren die Gleichungen mit geeigneten Zahlen, so lange, bis in beiden gleichviele von der, von uns ausgewählten Variable vorhanden ist
   (a) *Wir gehen bei Brüchen ähnlich vor, wenn wir sie auf den gemeinsamen Nenner bringen wollen.*
3. Wenn in beiden Gleichungen gleichviele von der ausgesuchten Variable vorhanden sind, und
   (a) *die Variablen das gleiche Vorzeichen, werden die beiden Gleichungen zueinander addiert*
   (b) *die Variablen unterschiedliche Vorzeichen, werden die beiden Gleichungen voneinander subtrahiert*

   Somit fällt eine der Variablen weg
4. Aus der neu entstandenen Gleichung , kann der Wert der Variable einfach berechnet werden
5. Durch Einsetzen des berechneten Wertes in eine der Ausgangsgleichungen, können wir den Wert der fehlenden Variable berechnen

Rechnung	Erklärung
$\begin{cases} I.: x+2y=27 \\ II.: 4x+3y=58 \end{cases}$	
$\begin{cases} I.: 4x+8y=54 \\ II.: 4x+3y=58 \end{cases}$	Wir haben die erste Gleichung mit 4 multipliziert, damit sowohl in der ersten als auch in der zweiten Gleichung gleichviele x vorhanden sind
$-\begin{cases} I.: 4x+8y=108 \\ II.: 4x+3y=58 \end{cases}$	Wir ziehen von der zweiten Gleichung die erste ab
$5y=50 \overbrace{\Rightarrow}^{:5} y=10$	Die neu entstandene Gleichung können wir einfach lösen
$x+2\cdot 10=27$	Wir setzen den ausgerechneten y-Wert in die Ausgangsgleichung ***(I)*** ein
$x+20=27 \overbrace{\Rightarrow}^{-20} x=7$	Wir lösen die Gleichung nach x
$4\cdot 7+3\cdot 10=27$	Wir machen die Probe mit der ursprünglichen Gleichung

Das Zahlenpaar (7|10) ist also Lösung des Gleichungssystems

Substitutionsmethode *(allgemein)*:

1. Aus einer der Gleichungen dürcken wir ein der Unbekannte durch die andere aus
2. Den oben berechneten Ausdruck setzen wir in die zweite Gleichung ein und erhalten dadurch eine Gleichung in einer Unbekannte, die wir leicht berechnen können
3. Wir berechnen die fehlende Unbekannte und machen die Probe

Rechnung	Erklärung
$\begin{cases} I.: x+2y=27 \\ II.: 4x+3y=58 \end{cases}$	Wir wollen dieses Gleichungssystem per Substitution lösen
$x+2y=27 \overset{-2y}{\overbrace{\Rightarrow}} x=27-2y$	Wir hätten natürlich auch mit der zweiten Gleichung arbeiten können
$4\cdot(27-2y)+3y=58$	Wir setzen für x den Ausdruck ein, den wir oben berechnet haben
$108-8y+3y=58$	
$108-5y=58$	Wir lösen die Gleichung
$-5y=-50 \overset{:(-5)}{\overbrace{\Rightarrow}} y=10$	
$x+2\cdot 10=27$	Wir setzen den Wert von y in die erste Gleichung ein und berechnen somit den Wert für x
$x+20=27 \mid -20$ $x=7$	

Probe:

$$\mathbf{4x+3y \Rightarrow 4\cdot 7+3\cdot 10 \Rightarrow 28+30=58}$$

3.3 Quadratische Gleichungen

An dieser Stelle sollten wir schon vorbereitet genug sein , um quadratische Gleichungen lösen zu können.In diesem Abschnitt werden wir drei verschiedene Typen von quadratischen Gleichungen kennenlernen.

Definition:

Eine quadratische Gleichung hat die Form $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ mit $\boldsymbol{a,b,c\in\mathbb{R}}$ ***und*** $\boldsymbol{a\neq 0}$

"Quadratische Gleichungen erster Art":

Quadratische Gleichungen, der Form $\boldsymbol{x^2=a}$, können sehr einfach gelöst werden.

Satz 12. *Für alle* $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$ *und alle* $\boldsymbol{a\in\mathbb{R}_0^+}$ *gilt:*

$$\boldsymbol{x^2=a \iff x=\sqrt{a}\ \textit{oder}\ x=-\sqrt{a}}$$

Beweis: Wir ordnen die Gleichung $\boldsymbol{x^2=a}$ um und schreiben sie in der Form $x^2-a=0$. Diese Gleichung können wir wieder in einer einfacheren Form schreiben : $\boldsymbol{(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0}$. Wegen **Satz 11** gilt dann: $\boldsymbol{x+\sqrt{a}=0}$ oder $\boldsymbol{x-\sqrt{a}=0}$. Daraus folgt sofort, dass $\boldsymbol{x=\sqrt{a}}$ oder $\boldsymbol{x=-\sqrt{a}}$ □

Bemerkung:

Kurz kann man die Lösung in der Form $\boldsymbol{x=\pm\sqrt{a}}$ schreiben.

Beispiel:

Löse die Gleichung $x^2=8$!

Wegen **Satz 12** können wir die Lösungen einfach hinschreiben:

$$\boldsymbol{x=\pm\sqrt{8}}$$

"Quadratische Gleichungen zweiter Art" haben die Form $ax^2 + bx = 0$. Beim Lösen von Gleichungen dieser Art wird **Satz 11** sehr nützlich sein.

Beispiel:

Löse die Gleichung $3x^2 + 5x = 0$

Rechnung	Erklärung
$3x^2 + 5x = 0$	Wir wollen diese quadratische Gleichung lösen
$x(3x + 5) = 0$	Wir heben auf der liken Seite der Gleichung x heraus
$x = 0$ oder $3x + 5 = 0$	Wegen **Satz 11**
$x_1 = 0$ oder $x_2 = -\frac{5}{3}$	Wir lösen die "Minigleichungen" von oben

"Quadratische Gleichungen dritter Art": haben die Form $ax^2 + bx + c = 0$.
Im Folgenden versuchen wir eine Lösungsformel für Gleichungen dieser Art herleiten:

Herleitung einer Lösungsformel für eine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ *und* $a \neq 0$

Vorbemerkung: Die Lösungsformel kann auf mehrere Arten hergeleitet werden.

1. Wir dividieren die Gleichung durch a:
   $ax^2 + bx + c = 0 \mid : a \;\Rightarrow\; x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
2. Wir bringen $\frac{c}{a}$ auf die rexhte Seite:
   $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
3. Wir vervollständigen den quadratischen Ausdruck auf der linken Seite, damit wir ihn dann in einer einfacheren und für uns schöneren Form schreiben können:
   $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$
4. Wegen der Identität $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ können wir die Gleichung wie folt umschreiben:
   $(x + \frac{b}{2a})^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \;\Rightarrow\; (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \;\Rightarrow\; (x + \frac{b}{a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$
   $\Rightarrow\; (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
5. Wir ziehen die Wurzel:
   $x + \frac{b}{2a} \overbrace{=}^{\text{Satz 12}} \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
6. Wir formen die Gleichung nach x um :
   $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
7. Wegen der Rechenregeln für die Quadratwurzel gilt:
   $-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$
8. Somit können wir die Gleichung in folgender Form schreiben:
   $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$
9. Wegen $\sqrt{4a^2} = \sqrt{4}\sqrt{a^2} = 2a$ gilt:
   $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$
   $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Arbeiten wir mit quadratischen Gleichungen, so erkennen wir, dass Gleichungen der Form $ax^2+bx+c=0$ immer entweder zwei Lösungen, oder eine Lösung oder gar keine Lösung haben[5].
Die Anzahl der Lösungen hängt von dem Wert der **Diskriminante (D)** ab. Das ist der Ausdruck unter der Wurzel. Bei unserer eben hergeleiteten Formel ist die Diskriminante also der Ausdruck b^2-4ac. Ist $D>0$,so besitzt die quadratische Gleichung zwei Lösungen. Ist $D=0$, so besitzt die Gleichung genau eine Lösung. Falls $D<0$ gilt, existiert keine Lösung ,da wir bereits vereinbart haben, dass unter der Wurzel keine negative Zahl stehen darf.

Zusammenfassend:

Die Diskriminante **D** einer quadratischen Gleichung ist der Ausdruck b^2-4ac

a.) $D<0 \quad \Rightarrow$ Es existiert keine reelle Lösung

b.) $D=0 \quad \Rightarrow$ Es existiert eine reelle Lösung

c.) $D>0 \quad \Rightarrow$ Es existieren zwei reelle Lösungen

Satz 13. *Für eine quadratische Gleichung der Form $ax^2+bx+c=0$ mit $a\neq 0$ und $b^2\geq 4ac$ gilt:*

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Beispiel:

Löse mit der oben hergeleiteten Formel die Gleichung $6x^2-19x+10=0$.

1. **Im ersten Schritt schreiben wir aus, welche Zahlen der Gleichung , welchen Parametern in der Lösungsformel entsprechen:**
   (a) a ist die Zahl, die vor x^2 steht. In diesem Beispiel gilt also $a=6$
   (b) b ist die Zahl, die vor x steht. In diesem Beispiel gilt: $b=-19$
   (c) c ist eine Konstante. In diesem Beispiel gilt: $c=10$

2. **Wir setzten die Zahlenwerte für a, b und c in die Lösungsformel ein:**

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \overset{\textit{Einsetzen!}}{\Rightarrow} x_{1,2}=\frac{-(-19)\pm\sqrt{(-19)^2-4\cdot 6\cdot 10}}{2\cdot 6} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{+19\pm\sqrt{361-240}}{12}$$

$$x_{1,2}=\frac{19\pm\sqrt{121}}{12} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{19\pm 11}{12}$$

$$x_1=\frac{19+11}{12}=\frac{30}{12}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$x_2=\frac{19-11}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

[5] Diese Formulierung lässt einiges zu wünschen übrig. Wenn wir korrekt formulieren wollen, sollten wir den Satz wie folgt ändern: Es gibt keine Lösung auf der Menge der reelen Zahlen $\mathbb{R}$.

Kapitel 4

Vektorrechnung und analytische Geometrie der Ebene

4.1 Definition

4.2 Darstellung von Vektoren

4.3 Operationen mit Vektoren

4.3.1 Addition von Vektoren

4.3.2 Multiplikation mit einem Skalar

4.4 Betrag / "Länge" eines Vektors

4.4.1 Einheitsvektor

4.5 Beispiele aus der Elementargeometrie

4.6 Das Skalarprodukt und der Winkel zwischen zweier Vektoren

4.7 Parameterdarstellung der Gerade

4.8 Gegenseitige Lage zweier Geraden

4.9 Normalvektoren

4.10 Geradengleichung mit Normalvektoren

4.11 Beispiele aus der Geometrie

4.11.1 Höhenschnittpunkt eines Dreiecks

4.11.2 Umkreismittelpunkt eines Dreiecks

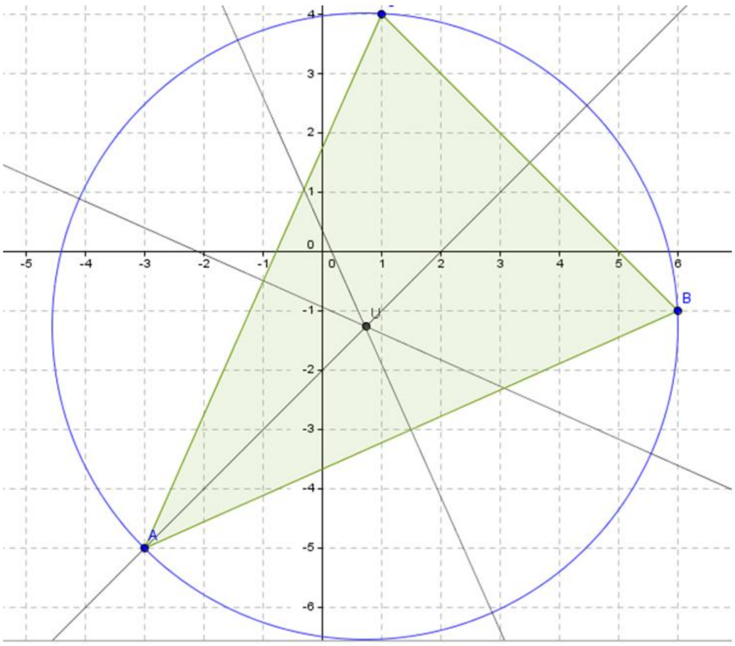


Abbildung 4.1: Seitensymmetrale der Dreiecks$_{ABC}$

Aufgabe:
Berechne den Umkreismittelpunkt des Dreiecks $_{ABC}$ mit $A(-3;-5)$, $B(6;-1)$ und $C(1;4)$!

Zuerst müssen wir aber einiges wiederholen. Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Seitensymmetralen. Die Seitensymmetralen eines Dreiecks gehen durch den Mittelpunkt der Seite und stehen auf diese normal. Das bedeutet aber, dass der Richtungsvektor der Seite Normalvektor der Seitensymmetrale ist.

Nach all diesen Vorbereitungen können wir das Beispiel angehen. Wir fangen, wie üblich mit unserem mathematischen "Kochrezept" an:

1. Berechne den Richtungsvektor der Seite AB

2. Berechne den Mittelpunkt der Seite AB

3. Berechne den Richtungsvektor der Seite BC

4. Berechne den Mittelpunkt der Seite BC

5. Stelle die Gleichung der Seitensymmetralen auf

6. Schneide die Seitensymmetralen

Im ersten Schritt berechnen wir also den Richtungsvektor der Seite AB:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (6;-1) - (-3;-5) = (6-(-3); -1-(-5)) = (9;4)$

Jetzt wollen wir den Mitellpunkt der Seite AB berechnen:

$M_{AB} = \frac{A+B}{2} = \frac{(-3;-5)+(6;-1)}{2} = \frac{(-3+6;-5+(-1))}{2} = \frac{(3;-6)}{2} = (1,5;-3)$

Die analogen Rechnungen machen wir auch bei der Seite BC:

$\overrightarrow{BC} = C - B = (1;4) - (6;-1) = (1-6; 4-(-1)) = (-5;5)$

$M_{BC} = \frac{B+C}{2} = \frac{(6;-1)+(1;4)}{2} = \frac{(6+1;-1+4)}{2} = \frac{(7;3)}{2} = (3,5;1,5)$

Jetzt können wir die Gleichungen der Seitensymmetralen problemlos aufstellen:

Dabei verwenden wir die übliche Formel : $\vec{n}X = \vec{n}P$*. Wie wir schon erwähnt haben, sind in diesem Beispiel die Richtungsvektoren der einzelnen Seiten die Normalvektoren der Seitensymmetralen.*

Die Seitensymmetrale der Seite AB hat die Gleichung:

$s_{AB} : \overrightarrow{AB}X = \overrightarrow{AB}M_{AB} \Rightarrow (9;4)(x;y) = (9;4)(1,5;-3) \Rightarrow 9x + 4y = 13,5 - 12 \Rightarrow 9x + 4y = 1,5$

Die Seitensymmetrale der Seite BC hat die Gleichung:

$s_{BC} : \overrightarrow{BC}X = \overrightarrow{BC}M_{BC} \Rightarrow (-5;5)(x;y) = (-5;5)(3,5;1,5) \Rightarrow -5x + 5y = -17,5 + 7,5 \Rightarrow -5x + 5y = -10$

Wir haben also zwei Winkelsymmetralen, die wir miteinander schneiden, das heißt, wir lösen das Gleichungssystem:

I.: 9x+4y=1,5
II.: -5x+5y=-10

Wie immer, suchen wir uns wieder eine der beiden Variablen aus und multiplizieren die Gleichungen solange, bis wir in beiden Gleichungen gleich viele von der gewählten Variable haben.
Sei die gewählte Variable x . Wir multiplizieren also die erste Gleichung mit 5 und die zweite Gleichung mit 9.

I.: 9x+4y=1,5 $| (\cdot 5)$
II.: -5x+5y=-10 $| (\cdot 9)$

Damit erhalten wir:

I.: 45x+20y=7,5
II.:-45x+45y=-90

Wir sehen, dass in der erstel Gleichung 45 x vorhanden sind und in der zweiten Gleichung -45x. Wenn wir also beide Gleichungen addieren, verschwinden die x. Und wir erhalten :

65y=-82,5
y= $\frac{-82,5}{65} \sim$ -1,27

Ab jetzt ist es dann überhaupt keine Hexerei mehr, die fehlende x-Koordinate zu berechnen. Wir setzen unseren y-Wert in die Gleichung 9x+4y=1,5 und lösen diese neue Gleichung nach x.

9x+4y=1,5
9x+4($\frac{-82,5}{65}$)=1,5
9x-$\frac{330}{65}$=1,5
9x=1,5+$\frac{330}{65} \iff 9x = \frac{97,5}{65} + \frac{330}{65} \iff 9x = \frac{427,5}{65}$
x=$\frac{427,5}{585} \sim$ 0,73

Die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U sind also : U(0,73;-1,27)

4.11.3 Inkreismittelpunkt eines Dreiecks

Kapitel 5

Aufgabensammlung

5.1 Kapitel 1

5.2 Kapitel 2

5.3 Kapitel 3

5.4 Kapitel 4

Literaturverzeichnis

[1] C.Sparrow, 1980, *The Lorenz Equation: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*: Springer-Verlag

Abbildungsverzeichnis