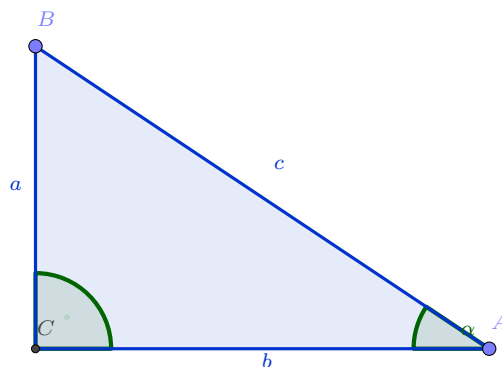


A következő feladatok megoldásánál a lent látható derékszögű háromszög jelöléseit használjuk!



Szabályok

$$\sin \alpha = \frac{\text{Szöggel szemközti befogó}}{\text{Átfogó}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Szög melletti befogó}}{\text{Átfogó}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{Szöggel szemközti befogó}}{\text{Szög melletti befogó}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{Szög melletti befogó}}{\text{Szöggel szemközti befogó}} = \frac{b}{a}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

1. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket !

$$(a) \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{b} = \frac{b \cdot a}{c \cdot b} = \frac{\cancel{b} \cdot a}{c \cdot \cancel{b}} = \frac{a}{c} = \sin \alpha$$

$$(b) (1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha) = \left(1 - \frac{b}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{c}\right) \stackrel{\text{nev.azon.}}{=} 1^2 - \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2 - b^2}{c^2} \stackrel{\text{Pitagorász tétel}}{=} \frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \cos \alpha &= \frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{1 + \frac{b}{c}} + \frac{b}{c} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{\frac{c}{c} + \frac{b}{c}} + \frac{b}{c} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{\frac{c+b}{c}} + \frac{b}{c} \\
 &= \left(\frac{a^2}{c^2} : \frac{c+b}{c}\right) + \frac{b}{c} = \left(\frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{c}{c+b}\right) + \frac{b}{c} = \left(\frac{a^2 \cdot c}{c^2 \cdot (c+b)}\right) + \frac{b}{c} \\
 &= \underbrace{\frac{a^2}{c \cdot (c+b)} + \frac{b \cdot (c+b)}{c \cdot (c+b)}}_{\text{Közös nevezőre hoztuk}} = \frac{a^2 + b(c+b)}{c(c+b)} = \frac{a^2 + bc + b^2}{c^2 + cb} \\
 &\stackrel{\text{Pitag.tétel}}{=} \frac{c^2 + cb}{c^2 + cb} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad \cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} &= \frac{b}{c} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{b}{c} \cdot \sqrt{\frac{b^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}} \\
 &= \frac{b}{c} \cdot \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b^2}} \stackrel{\text{Pitag.tétel}}{=} \frac{b}{c} \cdot \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{b \cdot c}{c \cdot b} = \frac{bc}{bc} = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{(e)} \quad \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \stackrel{\text{Nevez. azon.}}{=} \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha)} = \sin \alpha - \cos \alpha$$

$$\text{(f)} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \stackrel{\text{Pitag.tétel}}{=} \frac{c^2}{c^2} = 1$$

(g) Ennek a feladatnak a megoldásánál alkalmazni fogjuk az $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ nevezetes azonosságot:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\
 &\stackrel{\text{Nev. azon.}}{=} \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\
 &= \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\
 &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \stackrel{\text{(f) miatt}}{=} 1
 \end{aligned}$$

Természetesen ezt a feladatot is megtudjuk oldani a fentiekhez hasonló módon:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \sin \alpha \cdot \cos \alpha &= \frac{\left(\frac{a}{c}\right)^3 - \left(\frac{b}{c}\right)^3}{\frac{a}{c} - \frac{b}{c}} - \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} \\
 \frac{\frac{a^3}{c^3} - \frac{b^3}{c^3}}{\frac{a}{c} - \frac{b}{c}} - \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} &= \frac{\frac{a^3 - b^3}{c^3}}{\frac{a-b}{c}} - \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \left(\frac{a^3 - b^3}{c^3} : \frac{a-b}{c}\right) - \frac{ab}{c^2} \\
 \left(\frac{a^3 - b^3}{c^3} \cdot \frac{c}{a-b}\right) - \frac{ab}{c^2} &= \left(\frac{(a^3 - b^3) \cdot c}{c^3(a-b)}\right) - \frac{ab}{c^2} \\
 \frac{(a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \cdot c}{c \cdot c^2(a-b)} - \frac{ab}{c^2} &= \frac{(a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \cdot c}{c^3(a-b)} - \frac{ab}{c^2} = \frac{a^2 + ab + b^2}{c^2} - \frac{ab}{c^2} \\
 &= \frac{a^2 + ab + b^2 - ab}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} \underbrace{=}_{\text{Pitag.tétel}} \frac{c^2}{c^2} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(h)} \quad \frac{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 1}{\sin \alpha + \cos \alpha} &= \frac{2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} + 1}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}} = \frac{\frac{2ab}{c^2} + 1}{\frac{a+b}{c}} = \frac{\frac{2ab + c^2}{c^2}}{\frac{a+b}{c}} = \frac{2ab + c^2}{c \cdot (a+b)} \\
 \left(\frac{2ab + c^2}{c^2} : \frac{a+b}{c}\right) &= \left(\frac{2ab + c^2}{c^2} \cdot \frac{c}{a+b}\right) = \frac{(2ab + c^2) \cdot c}{c^2(a+b)} = \frac{2ab + c^2}{c \cdot (a+b)} \\
 &\underbrace{=}_{\text{Pitag.tétel}} \frac{2ab + a^2 + b^2}{c \cdot (a+b)} \underbrace{=}_{\text{Nev.azon}} \frac{(a+b)^2}{c \cdot (a+b)} = \frac{(a+b)(a+b)}{c \cdot (a+b)} = \frac{(a+b)}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \\
 &= \sin \alpha + \cos \alpha
 \end{aligned}$$

2. Bizonyítsa be a következő azonosságokat!

$$\text{(a)} \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Ilyen típusú feladatoknál célszerű a legegyszerűbb alakra hozni az egyenlet bal és jobb oldalát. Ha a végeredmény mindkét oldalon egyezik, bebizonyítottunk tekinthetjük az azonosságot:

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \underbrace{=}_{\text{Pit.tétel}} \frac{c^2}{a^2} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \\
 \frac{1}{\sin^2 \alpha} &= \frac{1}{\left(\frac{a}{c}\right)^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{c^2}} = \left(\frac{1}{1} : \frac{a^2}{c^2}\right) = \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{c^2}{a^2} = \left(\frac{c}{a}\right)^2
 \end{aligned}$$

Mivel az egyenlet mindkét oldala felírható $(\frac{c}{a})^2$ alakban, az azonosságot bebizonyítottunk tekinthetjük.

□

$$(b) \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Bizonyítás:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{b^2} \stackrel{\text{Pit.tétel}}{=} \frac{c^2}{b^2} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{(\frac{b}{c})^2} = \frac{1}{\frac{b^2}{c^2}} = \left(\frac{1}{1} : \frac{b^2}{c^2}\right) = \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{c^2}{b^2}\right) = \frac{c^2}{b^2} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

Mivel az egyenlet mindkét oldala felírható $(\frac{c}{b})^2$ alakban, az azonosságot bebizonyítottunk tekinthetjük.

□

$$(c) \quad \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 1$$

Bizonyítás:

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{b^2}} + \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{b^2 + a^2}{b^2}} + \frac{1}{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} \stackrel{\text{Pitag.tétel}}{=} \frac{1}{\frac{c^2}{b^2}} + \frac{1}{\frac{c^2}{a^2}} = \left(\frac{1}{1} : \frac{c^2}{b^2}\right) + \left(\frac{1}{1} : \frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1} \cdot \frac{b^2}{c^2}\right) + \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{a^2}{c^2}\right) = \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} \stackrel{\text{Pitag.tétel}}{=} \frac{c^2}{c^2} = 1$$

□

$$(d) \quad \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$$

Ennek az azonosságnak a bizonyításánál az $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ nevezetes azonosságot használjuk.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
& (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 \\
&= \sin^6 \alpha + 3 \cdot \sin^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha + \cos^6 \alpha \\
&= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + \underbrace{3 \cdot \sin^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha}_{\text{Kiemelhetünk } 3\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\text{-t}} \\
&= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_{=1}
\end{aligned}$$

Így felírhatjuk a következőt:

$$\underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_{=1}^3 = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

Tehát:

$$1^3 = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$1 = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

□