

Definíció 1. Az m és n egész számok esetén akkor mondjuk, hogy az m szám osztója a n -számnak, ha létezik olyan k egész szám, amelyre $m \cdot k = n$ teljesül.

Jelölés: $m \mid n$ [kiejtés: m osztója n -nek]

Definíció képlettel:

Legyen $m, n \in \mathbb{Z}$ $m \mid n \iff \exists k \in \mathbb{Z} : m \cdot k = n$

Tétel: 1. (Oszthatóság tulajdonságai)

1. $\forall n \neq 0 \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül: $1 \mid n$, $n \mid n$ und $n \mid 0$

Szöveggel:

- (a) Az egy osztója minden számnak
- (b) Minden szám osztója önmagának
- (c) 0-nak minden egész szám osztója

2. Ha $m \mid n$ és $n \mid m \Rightarrow m = n$ oder $-m = n$

3. $l \mid m$ és $m \mid n \Rightarrow l \mid n$ ($l \in \mathbb{Z}$)

4. $m \mid n \Rightarrow (lm) \mid (ln) \forall l \in \mathbb{Z}$

5. $\forall l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ esetén teljesül: $(lm) \mid (ln) \Rightarrow m \mid n$

6. Ha $m \mid n$ és $m \mid k \Rightarrow m \mid n \pm k$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$)

7. Ha $m \mid n \pm k \Rightarrow m \mid n$ és $m \mid k$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$)

Szöveggel:

(a) Ha egy szám osztója két számnak, akkor összegüknek és különbségüknek is osztója.

Kidolgozott feladat

Bizonyítsuk, hogy ha $n, m \in \mathbb{Z}$, és $3 \mid 4m + 2n$, akkor $3 \mid 20m + 16n$!

A feladat megoldásánál csak egy kis kreativitásra van szükségünk. Meg kell vizsgálnunk a második kifejezést és el kell végeznünk a megfelelő átalakításokat!

$20m + 16n$ felírható $5(4m + 2n) + 6n$ alakban. Ezután már csak meg kell néznünk, hogy van-e olyan oszthatósági tulajdonság, aminek segítségével bizonyíthatjuk a fenti feltevést.

Tehát azt akarjuk bizonyítani, hogy $3 \mid 5(4m + 2n) + 6n$ mivel tudjuk, hogy $3 \mid 4m + 2n$ az 5. tulajdonság miatt $3 \mid 5(4m + 2n)$. Teljesen egyértelmű, hogy $3 \mid 6n$ mivel 3 osztója 6-nak. Így a 7. szabály miatt $3 \mid 5(4m + 2n) + 6n$.

Tétel: 2. Oszthatósági szabályok

- 0-val való osztás értelmetlen
- Minden egész szám osztható 1-gyel
- Azok a számok oszthatók 2-vel, amelyeknek utolsó számjegye(egyes helyiértékén álló) osztható 2-vel
- Azok a számok oszthatók 3-mal, amelyeknek a számjegyeinek összege is osztható 3-mal

- Azok a számok oszthatók 4-gyel, amelyeknek az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám is osztható 4-gyel
- Azok a számok oszthatók 5-tel, amelyeknek utolsó számjegye is osztható 5-tel./ Azok a számok oszthatók öttel, amik 5-re vagy 0-ra végződnek
- Azok a számok oszthatók 6-tal, amelyek 2-vel és 3-mal is oszthatóak
- 7-tel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonjuk az utolsó számjegy dupláját (2-szeresét). Ha az így kapott szám osztható 7-tel, akkor az eredeti is. Ha még az így kapott számról sem tudjuk megállapítani, hogy osztható-e 7-tel, akkor ugyanezt a tendenciát kell folytatni, amíg olyan számot nem kapunk amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható 7-tel.

$$315 \Rightarrow 31 - (2 \cdot 5) = 21, \text{ ami osztható héttel} \Rightarrow 315 \text{ is osztható 7-tel}$$

- Azok a számok oszthatók 8-cal, amelyeknek az utolsó három számjegyéből képzett háromjegyű szám is osztható 8-cal
- Azok a számok oszthatók 9-cel, amelyek számjegyeinek összege is osztható 9-cel
- Azok a számok oszthatók 10-zel, amelyeknek utolsó számjegye is osztható 10-zel, magyarul 0-ra végződik
- 11-gyel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonom az utolsó számjegyet. Ha az így kapott szám osztható 11-gyel, akkor az eredeti is

$$5258 \Rightarrow 525 - 8 = 517 \Rightarrow 51 - 7 = 44, \text{ ami osztható 11-gyel} \Rightarrow 5258 \text{ is osztható 11-gyel}$$

- Azok a számok oszthatók 12-vel, amelyek 4-gyel és 3-mal is oszthatóak
- 13-mal úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadjuk az utolsó számjegy 4-szeresét

$$6175 \Rightarrow 617 + (4 \cdot 5) = 637 \Rightarrow 63 + (4 \cdot 7) = 91 \Rightarrow 9 + (4 \cdot 1) = 13, \text{ ami osztható 13-mal, tehát 6175 is osztható 13-mal}$$

- Azok a számok oszthatók 14-gyel, amelyek 2-vel és 7-tel is oszthatóak
- Azok a számok oszthatók 15-tel, amelyek 3-mal és 5-tel is oszthatóak
- Azok a számok oszthatók 16-tal, amelyeknek utolsó négy számjegyéből képzett négyjegyű szám is osztható 16-tal.
- 17-tel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonjuk az utolsó számjegy ötszörösét
 $132770 \Rightarrow 13277 - (5 \cdot 0) \Rightarrow 1327 - (5 \cdot 7) = 1292 \Rightarrow 129 - (5 \cdot 2) = 119, \text{ ami osztható 17-tel, tehát 132770 is osztható 17-tel}$
- Azok a számok oszthatók 18-cal amelyek 2-vel és 9-cel is oszthatóak
- 19-cel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadjuk az utolsó számjegy kétszeresét
 $7828 \Rightarrow 782 + (2 \cdot 8) = 798 \Rightarrow 79 + (2 \cdot 8) = 95 \Rightarrow 9 + (2 \cdot 5) = 19, \text{ ami egyértelműen osztható 19-cel, tehát 7828 is osztható 19-cel}$
- Azok a számok oszthatók 20-szal, amelyeknek az utolsó két számjegyükből képzett kétjegyű szám is osztható 20-szal
- Azok a számok oszthatók 21-gyel, amelyek 3-mal és 7-tel is oszthatóak

- Azok a számok oszthatók 22-vel, amelyek 2-vel és 11-gyel is oszthatóak
- 23-mal úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadjuk az utolsó számjegy 7-szeresét.
 $20033 \Rightarrow 2003 + (7 \cdot 3) = 2024 \Rightarrow 202 + (7 \cdot 4) = 230$, ami osztható 23-mal, tehát a 20033 is osztható 20033-mal
- Azok a számok oszthatók 24-gyel, amelyek 3-mal és 8-cal is oszthatóak
- Azok a számok oszthatók 25-tel, amelyeknek az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám is osztható 25-tel
- Azok a számok oszthatók 26-tal, amelyek 2-vel és 13-mal is oszthatóak
- A számot blokkokba kell rendezni hátulról, úgy, hogy egy blokkban 3 számjegy legyen. A blokkokat (tehát a képzett háromjegyű számokat) összeadjuk. Ha ez az összeg osztható 27-tel, akkor az eredeti szám is
 $2360367 \Rightarrow 2 \ 360 \ 367 \Rightarrow 2 + 360 + 367 = 729$, ami osztható 27-tel, tehát 2360367 is osztható 27-tel
- Azok a számok oszthatók 28-cal, amelyek 4-gyel és 7-tel is oszthatóak
- 29-cel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadjuk az utolsó számjegy háromszorosát
 $4205 \Rightarrow 420 + (3 \cdot 5) = 435 \Rightarrow 43 + (3 \cdot 5) = 58$, ami osztható 29-cel, tehát 4205 is osztható 29-cel
- Azok a számok oszthatók 30-cal, amelyek 3-mal és 10-zel is oszthatóak
- 31-gyel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonjuk az utolsó számjegy háromszorosát. Ha ez a szám osztható 31-gyel, akkor az eredeti is
 $204197 \Rightarrow 20419 - (3 \cdot 7) = 20398 \Rightarrow 2039 - (3 \cdot 8) = 2015 \Rightarrow 201 - (3 \cdot 5) = 186 \Rightarrow 18 - (3 \cdot 6) = 0$. Mivel 0 osztható 31-gyel, 204197 is osztható 31-gyel.
- Azok a számok oszthatók 32-vel, amelyeknek az utolsó öt számjegyéből képzett ötjegyű szám is osztható 32-vel
- Azok a számok oszthatók 33-mal, amelyek 3-mal és 11-gyel is oszthatóak
- Azok a számok oszthatók 34-gyel, amelyek 2-vel és 17-tel is oszthatóak
- Azok a számok oszthatók 35-tel, amelyek 5-tel és 7-tel is oszthatóak
- Azok a számok oszthatók 36-tal, amelyek 4-gyel és 9-cel is oszthatóak
- 37-tel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonjuk az utolsó számjegy 11-szeresét
 $32227 \Rightarrow 3222 - (11 \cdot 7) = 3145 \Rightarrow 314 - (11 \cdot 5) = 259$. Mivel 259 osztható 37-tel, 32227 is osztható 37-tel
- Azok a számok oszthatók 38-cal, amelyek 2-vel és 19-cel is oszthatóak
- Azok a számok oszthatók 39-cel, amelyek 3-mal és 13-mal is oszthatóak
- Azok a számok oszthatók 40-nel, amelyeknek az utolsó három számjegyéből képzett háromjegyű szám is osztható 40-nel