

A hasonlósági néhány alkalmazása II.

Keszeg Attila

2016.03.18.

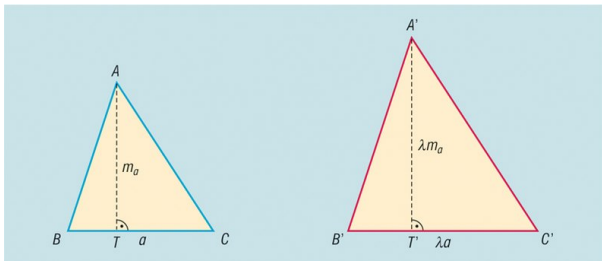
- 1 Hasonló síkidomok területének aránya
- 2 Hasonló testek térfogatának aránya

Definíció

Két hasonló alakzat hasonlóságának aránya az egymásnak megfelelő szakaszok hosszának aránya

A hasonlóság aránya pozitív szám, értéke megegyezik az egyik alakzatot a másikba vivő hasonlósági transzformáció arányának abszolút értékével.

Vizsgáljunk meg két hasonló háromszöget, és legyen λ a hasonlóság aránya



Arra vagyunk kíváncsiak, hogy aránylanak egymáshoz a háromszögek területei. Tudjuk, hogy a háromszög területét a következő képlettel tudjuk meghatározni:¹

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

¹ m_a az alaphoz tartozó magasságot jelöli

Már mindent tudunk ,ami kell a számolás elvégzéséhez:

$$\begin{aligned}\frac{T_{A'B'C'}}{T_{ABC}} &= \frac{\frac{\lambda a \cdot \lambda m_a}{2}}{\frac{a \cdot m_a}{2}} = \frac{\lambda a \cdot \lambda m_a}{2} : \frac{a \cdot m_a}{2} \\ &= \frac{\lambda a \cdot \lambda m_a}{2} \cdot \frac{2}{a \cdot m_a} = \frac{\lambda \cancel{a} \cdot \lambda \cancel{m_a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{m_a}} = \lambda^2\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a két háromszög területének aránya a hasonlóság arányának a négyzetével egyenlő

Tétel

Hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő

$$\frac{T'}{T} = \lambda^2$$

Példa

Feladat

*Két négyzet közül az egyik oldalának hossza **4 cm**-rel nagyobb a másikénál, területeik különbsége pedig **56 cm²**. Számítsuk ki az oldalhosszak arányát. Hogyan aránylanak egymáshoz a területek?*

Kidolgozás

Teljesen egyértelmű, hogy minden négyzet hasonló egymáshoz. A kisebbik négyzet oldalait x -szel jelöljük, emiatt $x + 4$ a hosszabbik négyzet oldala.

Jelölje T_k a kisebbik háromszög területét, T_n pedig a nagy háromszög területét

Tudjuk, hogy:

$$\begin{aligned}T_n - T_k &= 56 \text{ cm}^2 \\(x + 4)^2 - x^2 &= 56 \\x^2 + 8x + 16 - x^2 &= 56 \\8x + 16 &= 56 \\8x &= 40 \\x &= 5\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a kisebb négyzet oldala $x = 5 \text{ cm}$ a nagyobbiké pedig $x + 4 = 9 \text{ cm}$. Emiatt a két négyzet hasonlóságának aránya $\lambda = \frac{5}{9}$

Kidolgozás ((folytatás))

Ebből ugyancsak következik:

$$T_n = 9^2 \text{ és } T_k = 5^2$$

tehát:

$$\frac{T_k}{T_n} = \frac{5^2}{9^2} = \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \lambda^2$$

Tétel

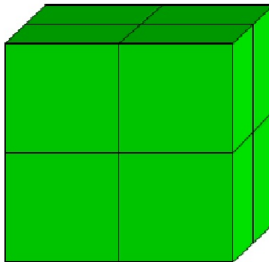
Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő

$$\frac{V'}{V} = \lambda^3$$

Példa

Feladat

Megduplázzuk egy kocka oldalait, hányszorosára nő a felszíne és a térfogata?



Kidolgozás

A hasonlóság aránya $\lambda = 2$

Emiatt $\lambda^2 = 4$ és $\lambda^3 = 8$

A felszíne a négyszeresére, a térfogata a nyolcszorosára nőtt

Feladat

Hányszorosára nagyítottunk egy testet, ha a térfogata a 27-szeresére nőtt?

Kidolgozás

$\lambda^3 = 27 \Rightarrow \lambda = 3$ tehát háromszorosára nagyítottuk