

A hasonlósági néhány alkalmazása I.

Keszeg Attila

2016.03.18.

1 A háromszög súlypontja

2 Arányossági tételek derékszögű háromszögekben

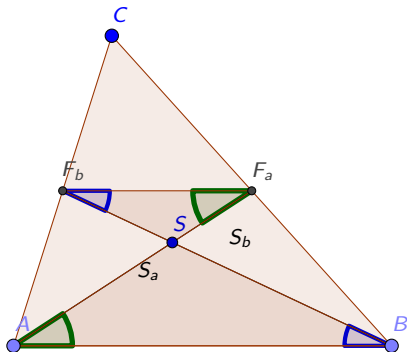
- Magasságtétel
- Befogótétel

Definíció

Egy háromszög súlyvonala a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz

Tétel

A háromszög bármely két súlyvonala úgy metszi egymást, hogy a metszéspont mindkét súlyvonalat $1 : 2$ arányban osztja két részre, a nagyobbik rész másik végpontja a háromszög megfelelő csúcsa



Bizonyítás :

Jelölje **S** az **ABC** háromszög **S_a** és **S_b** súlyvonalainak metszéspontját.

Mivel az **F_aF_b** szakasz a háromszög egyik középvonala , ezért egyértelmű hogy párhuzamos a háromszög **AB** oldalával és hossza pontosan az **AB** oldal hosszának a fele

$$F_a F_b = \frac{AB}{2}$$

A fenti ábrán azonos módon jelölt szögek váltószögek, ami azt jelenti, hogy egyenlő nagyságúak. Mivel az **ABS** és **SF_aF_b** háromszögekben két-két szög egyenlő nagyságú, egyértelműen következik a tanultak alapján, hogy a két háromszög **hasonló**. Ebből szintén csak egyértelműen következik, hogy megfelelő oldalaik hosszának aránya egyenlő:



Bizonyítás (folytatás):

$$\frac{BS}{SF_b} = \frac{AS}{SF_a} = \frac{AB}{F_a F_b} = 2$$

Ebből könnyen belátható, a következő:

$$BS = 2 \cdot SF_b, \quad AS = 2 \cdot SF_a, \quad AB = 2 \cdot F_a F_b$$

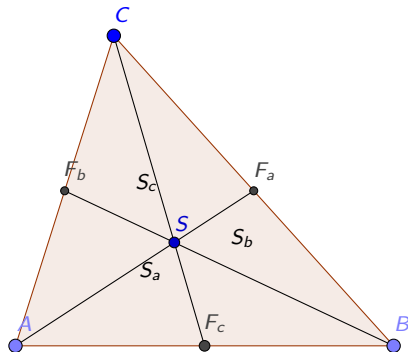
Ez pedig pontosan az, amit bizonyítani akartunk. □

A fenti tételből azonnal következik egy másik tétel is, melyet már korábban is láthattunk

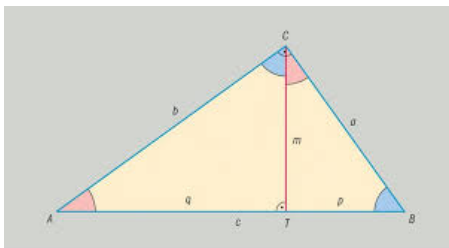
Tétel

A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont mindhárom súlyvonalnak a háromszög megfelelő csúcsától távolabbi harmadolópontja.

*A háromszög súlyvonalainak metszéspontját a háromszög **súlypontjának** nevezzük.*



Vegyünk fel egy **ABC** derékszögű háromszöget, majd húzzuk be az átfogóhoz tartozó **CT** magasságot:



Tudjuk, hogy a magasság a "nagy" **ABC** derékszögű háromszögünket felbontja két kisebb derékszögű háromszögre, mégpedig az **ATC** és **CTB** háromszögekre. Mivel az ábrán azonos módon jelölt szögek egyenlőek, egyértelmű hogy a két "kisebb" háromszög hasonló egymáshoz, valamint hasonlóak a "nagy" háromszöghöz

$$ATC \sim CTB \sim ACB$$

Vizsgáljuk meg a két kisebb háromszög hasonlóságát!
Mivel a megfelelő oldalhosszak aránya megegyezik, felrhatjuk a következőt:

$$\frac{CT}{AT} = \frac{TB}{CT}$$

Ebből keresztszorzással következik:

$$CT^2 = AT \cdot TB$$

Az ábrán használt jelöléseink miatt $CT = m$, $AT = q$ és $TB = p$.
Ha a megfelelő jelöléseket behelyettesítjük a fenti egyenletbe a következőt kapjuk:

$$m^2 = p \cdot q \Rightarrow m = \sqrt{p \cdot q}$$

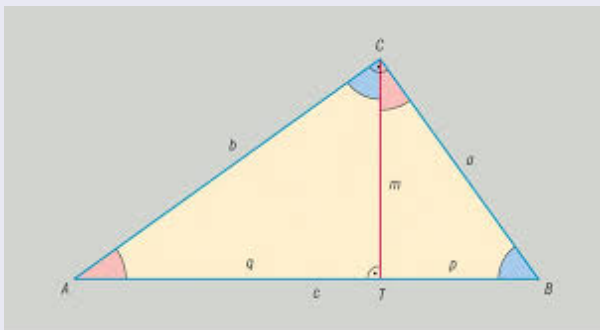
Tétel (Magasságtétel)

Derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságának hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyekre az átfogó a magasságot osztja

Példa

Feladat

A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága egy **2 cm** és egy **8 cm** hosszú szeletre osztja. Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság? Mekkora a befogók?



Kidolgozás

Mivel a feladatból egyértelműen kiderül, mekkora részekre osztja fel a magasság az átfogót, a háromszög magasságát probléma nélkül ki tudjuk számolni :

$$m = \sqrt{p \cdot q} \quad \overset{p=2, q=8}{\Rightarrow} \quad m = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

A háromszög magassága tehát **4 cm**

A háromszög hiányzó befogóit a részháromszögek és Pitagorasz tételének segítségével egyszerűen kiszámítjuk :

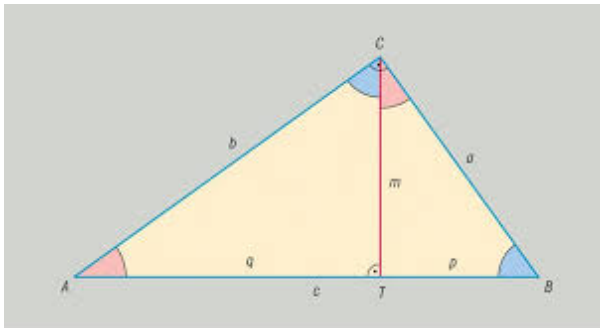
- **TBC-háromszög:**

$$m^2 + p^2 = a^2 \quad \overset{\text{Behely.}}{\Rightarrow} \quad 4^2 + 2^2 = a^2 \Rightarrow 20 = a^2 \quad \overset{\sqrt{}}{\Rightarrow} \quad a = \sqrt{20}$$

- **TAC-háromszög:**

$$m^2 + q^2 = b^2 \quad \overset{\text{Behely.}}{\Rightarrow} \quad 4^2 + 8^2 = b^2 \Rightarrow 80 = b^2 \quad \overset{\sqrt{}}{\Rightarrow} \quad b = \sqrt{80}$$

Vessünk újra egy pillantást a fenti ábrán látható derékszögű háromszögre



Azt már megvizsgáltuk, hogy aránylanak egymáshoz a részháromszögek. A továbbiakban azt fogjuk vizsgálni, hogy aránylanak a részháromszögek az eredeti "nagy" háromszöghöz.

Mivel a **CTB** háromszög hasonló az **ABC** háromszöghöz felírhatjuk a következőt:

$$\frac{TB}{CB} = \frac{CB}{BA}$$

Keresztbeszorzás után a következőt kapjuk:

$$CB^2 = TB \cdot BA$$

Utolsó lépésként behelyettesítjük az ábrán használt jelöléseket:

$$a^2 = p \cdot c \quad \Longleftrightarrow \quad a = \sqrt{p \cdot c}$$

Az **ATC** és **ACB** háromszögeket a fentihez hasonlóan vizsgálva a következő egyenletet kapjuk:

$$b^2 = q \cdot c \quad \Longleftrightarrow \quad b = \sqrt{q \cdot c}$$

Tétel (Befogótétel:)

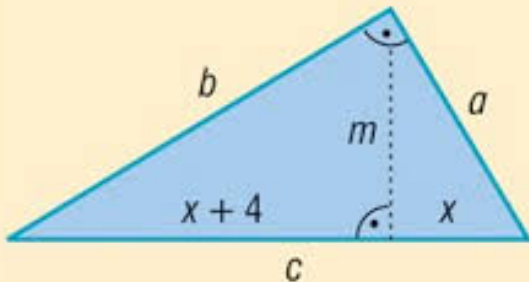
Derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogónak az átfogóra eső merőleges vetülete hosszának

Példa

Feladat

*Egy derékszögű háromszögben a befogók hosszának aránya **5 : 3**. Az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két olyan szakaszra osztja, amelyek közül az egyik **4 cm**-rel hosszabb, mint a másik. Számítsuk ki az átfogó és az átfogóhoz tartozó magasság hosszát.*

Kidolgozás



Kidolgozás

A befogó tétellel a fenti ábra alapján felírhatjuk a következőket:

$$a^2 = c \cdot x \quad \text{és} \quad b^2 = c \cdot (x + 4)$$

Mivel $a : b = 3 : 5$ felírhatjuk az innen már egyértelmű egyenletecskét:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2} &= \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25} = \frac{c \cdot x}{c \cdot (x+4)} = \frac{x}{x+4} \\ \frac{9}{25} &= \frac{x}{x+4} \\ 9x &= 25(x + 4) \Rightarrow x = 2.25 \text{ cm} \end{aligned}$$

Átfogó hossza:

$$c = x + x + 4 = 2.25 + 2.25 + 4 = 8.5 \text{ cm}$$

Magasság hossza:

$$m = \sqrt{x \cdot (x + 4)} = \sqrt{2.25 \cdot (6.25)} = 3.75 \text{ cm}$$

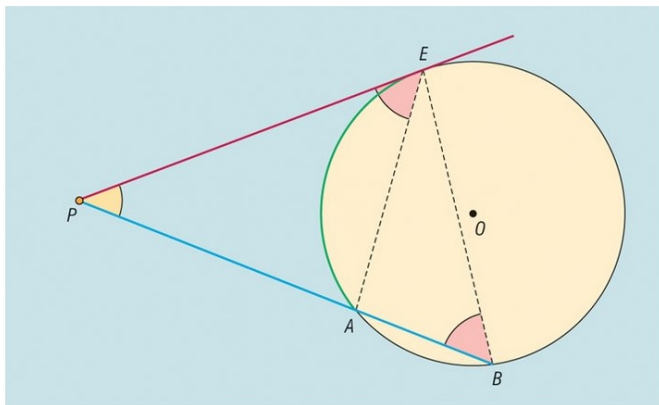
A körhöz húzott érintőszakaszok tétele

Definíció

Adott körhöz adott külső pontból húzott érintőszakasz hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyek az adott pontra illeszkedő szelőn a ponttól a körrel alkotott metszéspontokig terjednek

A körhöz húzott érintőszakaszok tétele képlettel

$$PE^2 = PA \cdot PB \iff PE = \sqrt{PA \cdot PB}$$



Bizonyítás

Szorgalmi feladat

A körhöz külső pontból húzott szelőszakaszok tétele

Definíció

Adott körhöz adott külső pontból húzott szelőszakaszok hosszának szorzata állandó, csak a körtől és az adott ponttól függ

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

