

1 A számtani közép

Definíció 1. (Két nemnegatív szám számtani közepe)

Két nemnegatív szám számtani közepének a két szám összegének a felét nevezzük.

Képlettel:

$$A(a; b) = \frac{a+b}{2}$$

Példák

1. Határozzuk meg 37 és 49 számtani közepét!

Ebben a feladatban egyszerűen csak behelyettesítünk a képletbe:

$$A(a; b) = \frac{a+b}{2} \Rightarrow A(37; 49) = \frac{37+49}{2} = \frac{86}{2} = 43$$

2. Februárban Marci 150 ezer forint nettó bért kapott, áprilisban pedig 216 ezer forintot. Marci bére márciusban és áprilisban is ugyanannyival növekedett. Mennyi Marci márciusi bére?

Marci márciusi bére annnyival több a februári bérénel, amennyivel az áprilisi bére több a márciusinál. Jelöljük Marci márciusi bérét x -szel. A márciusi és februári fizetése közötti különbség $x - 150\,000$ a fenti adatok értelmében megegyezik az áprilisi és márciusi bér közötti különbséggel, ami $216\,000 - x$. Tehát mindösszesen annyi a dolgunk, hogy oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\begin{array}{rcl} x - 150\,000 & = & 216\,000 - x \quad | + x \\ 2x - 150\,000 & = & 216\,000 \quad | + 150\,000 \\ 2x & = & 366\,000 \quad | : 2 \\ x & = & 183\,000 \end{array}$$

Ez azt jelenti, hogy Marci március havi fizetése 183 000 forint.

3. Egy téglalap két szomszédos oldalának hossza a cm és b cm. Hány cm annak a négyzetnek az oldala, amelynek a téglalapével megegyező a kerülete?

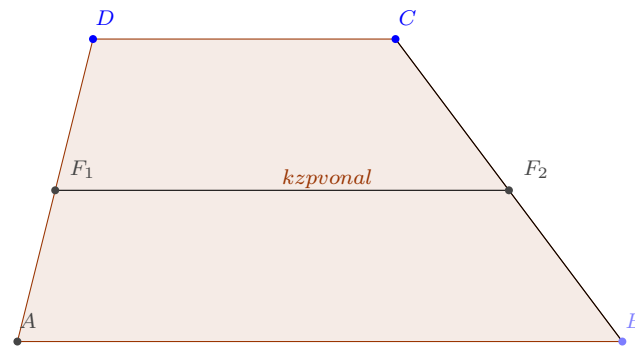
Legyen a keresett négyzet oldala x cm. A téglalap kerülete $(2a + 2b)$ cm, a négyzet kerülete $4x$ cm. A kerületek egyenlők: $4x = 2a + 2b$. A négyzet oldala tehát $\frac{a+b}{2}$ cm hosszú, azaz a téglalap két szomszédos oldala hosszának számtani közepe.

4. **Állítás:** A trapéznál a párhuzamos oldalpárok számtani közepe maga a középvonal

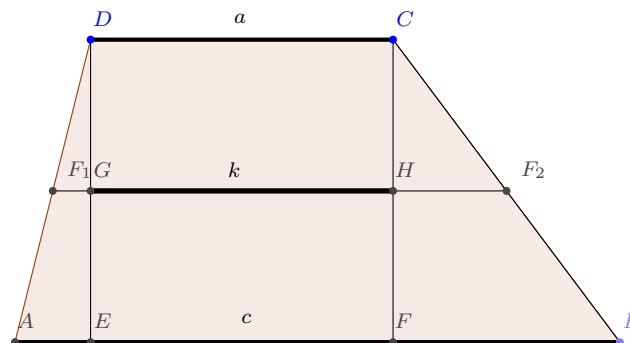
Képlettel:

$$k = \frac{a+c}{2}$$

Ezt az állítást beszeretnénk bizonyítani.



Bizonyítás. Először megrajzoljuk azokat a magasságvonalakat, amelyek a trapézunkak két derékszögű hátomszögge és egy téglalappá darabolják.



Teljesen egyértelmű, hogy az ADE és BCF derékszögű háromszögekben az F_1G és HF_2 szakaszok hossza $\frac{AE}{2}$ és $\frac{FB}{2}$. Ennek segítségével beláthatjuk a következőt:

$$k = c + \frac{AE}{2} + \frac{FB}{2} = a + \frac{AE+FB}{2} = a + \frac{c-a}{2} = \frac{a+c}{2}$$

□

Definíció 2. (Két nemnegatív szám mértanii közepe)

Két nemnegatív szám mértani közepén a két szám szorzatának négyzetgyökét értjük.

Képlettel:

$$G(a; b) = \sqrt{a \cdot b}$$

Példák

1. Határozzuk meg 3 és 12 mértani közepét!

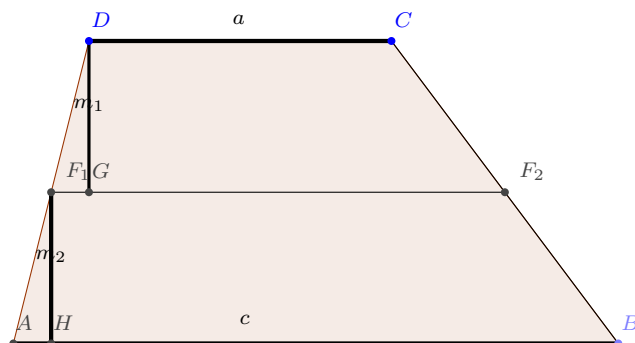
Ebben a feladatban egyszerűen csak behelyettesítünk a képletbe:

$$G(a; b) = \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow G(3; 12) = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

2. **Állítás:** A trapézban a két alap mértani közepének felel meg az a szakasz, amely párhuzamos ezekkel és két egymáshoz hasonló trapézra szeli az eredeti trapézt.

Bizonyítás. Szorgalmi feladat

Ábra segítségnyújtásként :



□

Tétel 1.Két nemnegatív a és b valós szám esetén

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$$

Bizonyítás.

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$$

Mivel a kiindulási feltételeink szerint a és b nemnegatív valós számok a $\sqrt{ab}$ és $\frac{a+b}{2}$ sem negatívak, így ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emeljük, egy az eredetivel ekvivalens állítást fogalmazunk meg.

$$a \cdot b \leq \frac{(a+b)^2}{4}$$

Tudjuk, hogy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ezért felírhatjuk a következőt:

$$a \cdot b \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

Most szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 4–gyel

$$4 \cdot a \cdot b \leq a^2 + 2ab + b^2$$

Ha mindkét oldalból elveszünk $4 \cdot a \cdot b$ -t, a következőt kapjuk:

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$

Mivel $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ felírhatjuk az egyenlőtlenséget más alakban:

$$0 \leq (a-b)^2$$

Mivel egy szám négyzete **mindig** pozitív vagy nulla az utolsó egyenlőtlenség nyilvánvalóan igaz és ez által az eredeti is.

□

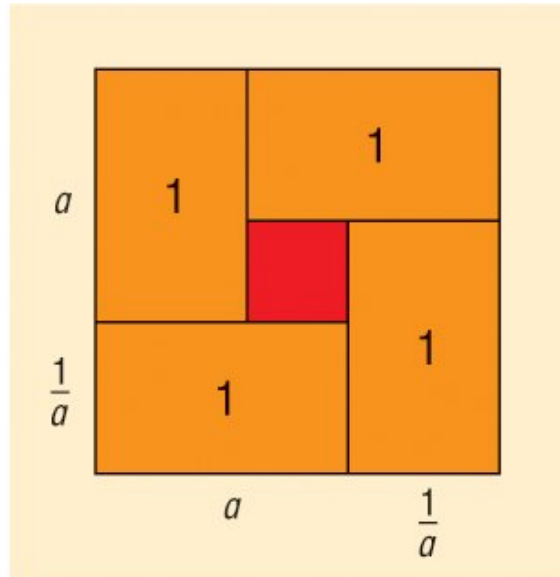
Tétel 2.

Egy tetszőleges $a > 0$ valós számnak és reciprokának összege legalább 2

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Bizonyítás.

Házi feladat. A bizonyításnál segítségünkre lehet a következő ábra:



□

Definíció 3. (Pozitív számok nevezetes közepei)

Az $a_1, a_2; \dots; a_{n-1}; a_n$ nemnegatív valós számok

Számtani (aritmetikai) közepe:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Mértani (geometriai) közepe:

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Négyzetes (quadratus) közepe:

$$Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

Harmonikus közepe:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad \text{ha } a_1, a_2; \dots; a_{n-1}; a_n > 0$$

Tétel 3. (Nevezetes közepek közötti összefüggés)

$$H \leq G \leq A \leq Q$$

Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n$

Nevezetes közepek alkalmazásai

1. számtani közép: statisztikai átlag kiszámítása
2. mértani közép: átlagos növekedési ütem kiszámítása, magasságtétel, befogótétel
3. négyzetes közép: statisztikai szórás kiszámítása
4. harmonikus közép: átlagsebesség meghatározása

Megjegyzés 1.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmas lehet különböző mennyiségek minimumának illetve maximumának meghatározására.

Gondolkodtató feladat

Legfeljebb mekkora lehet annak a téglalap alakú teleknek a területe, amelyet 52 m hosszú kerítéssel tudunk körbekeríteni?