

1 A másodfokú egyenlet és függvény

1.1 Bevezetés

Ebben a tanévben már megismerkedtünk különböző egyenletmegoldási módszerekkel, ezt követően pedig a gyökvonás rejtjelmeit tanulmányoztuk. Ennek a fejezetnek a célja, hogy ezt a két témakört ötvözzük. A fejezet fókuszában a másodfokú egyenlet megoldása áll, mely egy szimpla megoldóképlet segítségével probléma nélkül kivitelezhető. A következő időszakban bepillantást nyerünk abba is, mennyire sokrétűen alkalmazhatóak másodfokú egyenletek a természettudományokban és a pénzügyi szektorban.

A másodfokú egyenletek jelentőségéről az is árulkodik, hogy már Krisztus előtt kétezerben is próbálkoztak az akkori matematikusok ezen egyenletek megoldásával. Az első írásos emlékek ezzel a témakörrel kapcsolatban az ókori Mezopotámiából maradtak fenn. A babiloni/mezopotámiai matematikusok már Kr.e. 2000 körül is nagyon nagy biztonsággal oldottak négyzetes egyenleteket. A következő feladat egy Kr.e. 2000 táján készült ekírásos agyagtábláról maradt fenn:

Két négyzet területösszege 1000 területegység. Az egyik négyzet oldala a másik oldalának $\frac{2}{3}$ -ánál tízzel kisebb. Mekkora a négyzet oldalai?

Fordítsuk le ezt a feladatot a matematika nyelvére:

1. A feladatban négyzetek területéről van szó, amit általánosan a $T = x^2$ képlettel számolhatunk ki. (A képletben az x a négyzet oldalhosszúságát jelöli.)
2. Az egyik négyzet oldala a másik oldalának $\frac{2}{3}$ -ánál tízzel kisebb a következő módon írható fel: Ha x jelöli a nagyobbik oldalhosszúságú négyzet oldalát, akkor $\frac{2}{3}x - 10$ a másik négyzet oldalának hosszúságát.
3. Mivel a két négyzet területének összege 1000 területegységnek felel meg $x^2 + (\frac{2}{3}x - 10)^2 = 1000$ a négyzet területképlete miatt.
4. A megfelelő átalakításokat elvégezve megkaphatunk egy a megoldóképlet segítségével könnyen megoldható egyenletet:

$$x^2 + (\frac{2}{3}x - 10)^2 = 1000 \iff x^2 + (\frac{2}{3}x)^2 - 2 \cdot (\frac{2}{3}x \cdot 10) + 10^2 = 1000$$

Az $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ nevezetes azonosság miatt.

$$x^2 + \frac{4}{9}x^2 - 2 \cdot \frac{20}{3}x + 100 = 1000 \iff x^2 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 100 = 1000$$

$$x^2 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{120}{9}x + 100 = 1000 \quad | \cdot 9$$

$$9x^2 + 4x^2 - 120x + 900 = 9000 \quad | - 9000$$

$$9x^2 + 4x^2 - 120x - 8100 = 0$$

$$13x^2 - 120x - 8100 = 0$$

Az ókori Egyiptomban sem okozott problémát másodfokú egyenletek, sőt egyenletrendszerek megoldása. Az egyik legősibb és legjobb állapotban fennmaradt matematikai emlék az úgynevezett "**Rhind-papirusz**". Ez a papirusz tekercs Krisztus előtt 1650-ben íródott egy kétszáz évvel régebbi matematikai "szöveg" másolataként. A Rhind papirusz 33 cm széles, 5 méter hosszú és 85 darabfeladatot tartalmaz, köztük másodfokú egyenleteket. Ez az ősi emlék ma a londoni British Múzeumban tekinthető meg. A következő feladat is erről a papiruszról származik:

Egy téglalap szélessége x és magassága y . A magassága $\frac{3}{4}$ -szerese a szélességének. A téglalap területe 12 területegység. Mekkora a téglalap oldalai?

1.2 A másodfokú függvény ábrázolása

Ebben az alfejezetben fel kell elevenítenünk a kilencedik osztályban tanult függvény ábrázolási módszereket. Ezt legkönnyebben egy bevezető példa segítségével tehetjük.

Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

Ilyen feladatok megoldásánál elengedhetetlen a függvény teljes négyzetté alakítása, amelyhez a jól ismert nevezetes azonosságokat kell fejben tartanunk:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Hogy is működött a teljes négyzetté alakítás?

Úgy kell tekintenünk a függvényre, mintha az a megfelelő nevezetes azonosság jobb oldala lenne:

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{\text{"}a^2\text{"}} - \underbrace{6x}_{\text{"}2ab\text{"}} + 8 = (x - 3)^2 - 1$$

A következő "recept" segíthet a teljes négyzetté alakítás "művészetének" elsajátításában:

1. Annak eldöntése, hogy a "+"-os vagy "-"-os nevezetes azonosságot használjuk rendkívül egyszerű. Csak meg kell néznünk, hogy a tagok között összeadás vagy kivonás van.
2. A zárójelben első helyre az első tag gyöke kerül. Fenti példában x , mert $\sqrt{x^2} = x$
3. Ezután következik a nevezetes azonosságnak a középső része. Tehát a $6x$. Ez először el kell osztanunk kettővel, így $3x$ -et kapunk. Ezután az így megkapott kifejezést ($3x$) még el kell osztanunk azzal a kifejezéssel, amit a zárójelbe első helyre írtunk, tehát x -szel. Így végeredményként $\frac{3x}{x} = 3$ -at kapunk. Így a zárójelen belülre még beírhatjuk a 3-at.
4. Már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a fenti lépésben meghatározott tag négyzete ténylegesen az a szám, amire szükségünk van, avagy nem. Ha igen, akkor végeztünk a teljes négyzetté alakítással. Ha nem, szükségünk vagy még egy kis korrekciós/ "szépészeti" beavatkozásra.

A fenti példában a zárójelen belüli második tagnak a négyzete 3, ami szép szám, de a mi esetünkben nem a legmegfelelőbb, ugyanis a mi függvényünkben az utolsó tag nem 9, hanem 8. Ezt a kis malört könnyen orvosolhatjuk, mégpedig azáltal, hogy kivonunk egyet, ugyanis $9 - 1 = 8$

Ellenőrzésként kiszámolhatjuk, hogy $(x - 3)^2 - 1$ ténylegesen egyenlő-e $x^2 - 6x + 8$ -cal.

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 - 1 &= x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 1 \\ &= x^2 - 6x + 9 - 1 = x^2 - 6x + 8\end{aligned}$$

Ezen átalakítások után már csak egy kis gyerekjáték a függvény ábrázolása:

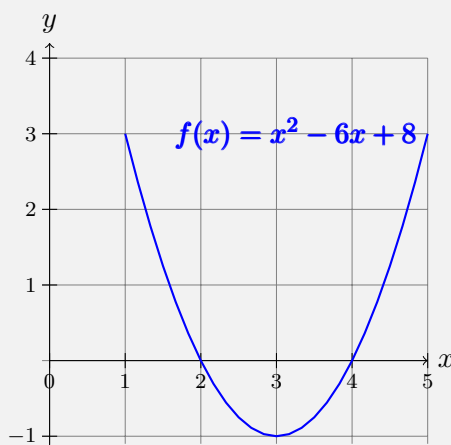
Tehát szeretnénk ábrázolni az $f(x) = (x - 3)^2 - 1$ függvényt.

1. Először azt a részt vizsgáljuk, ami a négyzetre van emelve, tehát az $(x - 3)^2$ -t. A négyzetre emelt ifejezés az x-tengelyre vonatkozik. Ez egy parancs számunkra, hogy az origóból indulva menjünk el három egységet a pozitív x-tengely irányába. Azért a pozitív x-tengely irányába.

Fontos: Az, hogy az x-tengelyen merre indulunk el, mindig attól függ, hogy a zárójelen belül milyen művelet van. Ha összeadás, akkor negatív irányba menetelünk, ha kivonás, akkor pozitív irányba. Tehát pontosan ellenkezőleg, mint azt intuitív tennénk.

2. Ha ezzel megvagyunk, tehát ceruzánk épp a koordináta rendszer $(3; 0)$ pontjánál helyezkedik el, foglalkozhatunk azzal a résszel is, amit idáig elhanyagoltunk. Az $(x - 3)^2$ után a szám (-1) arra utal, hogy jelenlegi helyzetünkből merre felé induljunk az y-tengelyen. Az x-tengellyel ellentétben itt már nem kell fejben tartanunk, hogy ellenkező irányba induljunk el, mint azt ösztönösen tennénk. Tehát még lefelé megyünk egy egységet. Így a $(3; -1)$ pontban lyukadunk ki.

3. Ebből a pontból kiindulva megrajzoljuk az alapfüggvényt, és az ábrázolással kész is vagyunk.



Már csak jellemeznünk kell a függvényt:

A függvény vizsgálat szempontjai:

Grafikon, értelmezési tartomány, értékkészlet, paritás, zérushely, függvény monotonitása, szélsőérték (minimum vagy maximum)

1. Grafikon: parabola
2. Értelmezési tartomány: Minden valós szám x . **Képlettel:** $x \in \mathbb{R}$
Ez könnyen indokolható, hiszen minden x -értékre tudjuk értelmezni a fenti függvényt.
3. Értékkészlet: A függvény ábrázolásából egyértelműen látszik, hogy a legkisebb y -érték, amit a függvény felvesz az $y = -1$. Emiatt felírhatjuk a következőt: $y \geq -1$
4. A fenti függvénynek nincs paritása
5. A függvénynek szemmel láthatóan két zérushelye van (tehát két helyen metszi az x-tengelyt): $x_1 = 2$; $x_2 = 4$
6. Ha $x \leq 3$ a függvény szigorúan monoton csökken és szigorúan monoton nő, ha $x \geq 3$ (Ez az ábrázolásból elég egyértelműen kiderül)
7. A függvénynek egyértelmű, hogy $x = 3$ -nál minimuma van, melynek értéke $f(3) = -1$

Ábrázold és jellemezd a következő függvényt:

$$f(x) = -3x^2 + 21x - 36$$

Ennél a feladatnál alapvetően ugyanúgy kell eljárunk, mint azt a fenti példában tettük. Egy jelentéktelennek tűnő, ám annál fontosabb dolgot azért mégis figyelembe kell vennünk.

Ha ugyanúgy állunk neki a feladat megoldásnak, mint azt az előbb tettük, az első tagból gyököt kellene vonnunk, ami két problémát is felvet:

1. Negatív számból nem vonunk négyzetgyököt.
2. Ha kiemelünk -1 -et és csak a 3-ból vonunk gyököt, nem biztos hogy jót teszünk magunkkal

A fenti problémák mindegyike könnyen orvosolható. A teljes négyzetté alakítás előtt kiemelünk (-3) -at, és az így kapott "egyszerű" másodfokú függvényt alakítjuk át. *Természetesen nem elfelejtve, hogy kiemeltünk (-3) -at.*

Ezen gondolatok után, neki állhatunk a tényleges munkának:

$$1. -3x^2 + 21x - 36 = -3 \cdot (x^2 - 7x + 12)$$

Az $x^2 - 7x + 12$ kifejezés könnyen teljes négyzetté alakítható:

- (a) Vonjunk gyököt az első tagból (x^2), így x -et kapunk, ami a zárójelen belül az első helyre kerül
- (b) A középső tagot elosztjuk 2-vel, majd azzal a taggal, amelyet a zárójelben az első helyre írtunk, tehát x -szel. Így 3,5-öt kapunk, ami a zárójelen belül a második helyre kerül.
- (c) Így felírhatjuk a következőt: $(x - 3,5)^2$
- (d) Már csak egy probléma van, mégpedig: $(x - 3,5)^2 = x^2 - 7x + 12,25$
 $x^2 - 7x + 12,25 \neq x^2 - 7x + 12$
- (e) Ez a probléma könnyen orvosolható, csak ki kell vonnunk 0,25-öt
- (f) A végeredmény tehát: $x^2 - 7x + 12 = (x - 3,5)^2 - 0,25$

Így felírhatjuk a következőt:

$$\begin{aligned} -3x^2 + 21x - 36 &= -3 \cdot (x^2 - 7x + 12) = -3 \cdot [(x - 3,5)^2 - 0,25] \\ -3 \cdot [(x - 3,5)^2 - 0,25] &= -3 \cdot (x - 3,5)^2 + 0,75 \end{aligned}$$

2. A függvény ebben az alakban már tökéletesen alkalmas az ábrázolásra.

Ne zavarjon meg senkit, hogy a négyzetre emelt kifejezés előtt $(-)$ áll. Ez mindössze annyit jelent, hogy a grafikon nem egy felfelé nyitott parabola lesz, hanem lefelé nyitott parabola.

$$f(x) = \underline{\underline{-3 \cdot (x - 3,5)^2 + 0,75}}$$

- (a) A $(x - 3,5)^2$ azt jelenti, hogy az origóból 3,5 egységet mozgunk a pozitív x-tengely irányába. Így a $(3,5; 0)$ pontban kötünk ki.
- (b) Ebből a $(3,5; 0)$ pontból még el kell mozdulnunk 0,75-egységnyit a pozitív y-tengely irányába ($+0,75$ miatt). Így a $(3,5; 0,75)$ pontban lyukadunk ki. Ez a pont szolgál kiindulási pontként a grafikonunk megrajzolásánál.

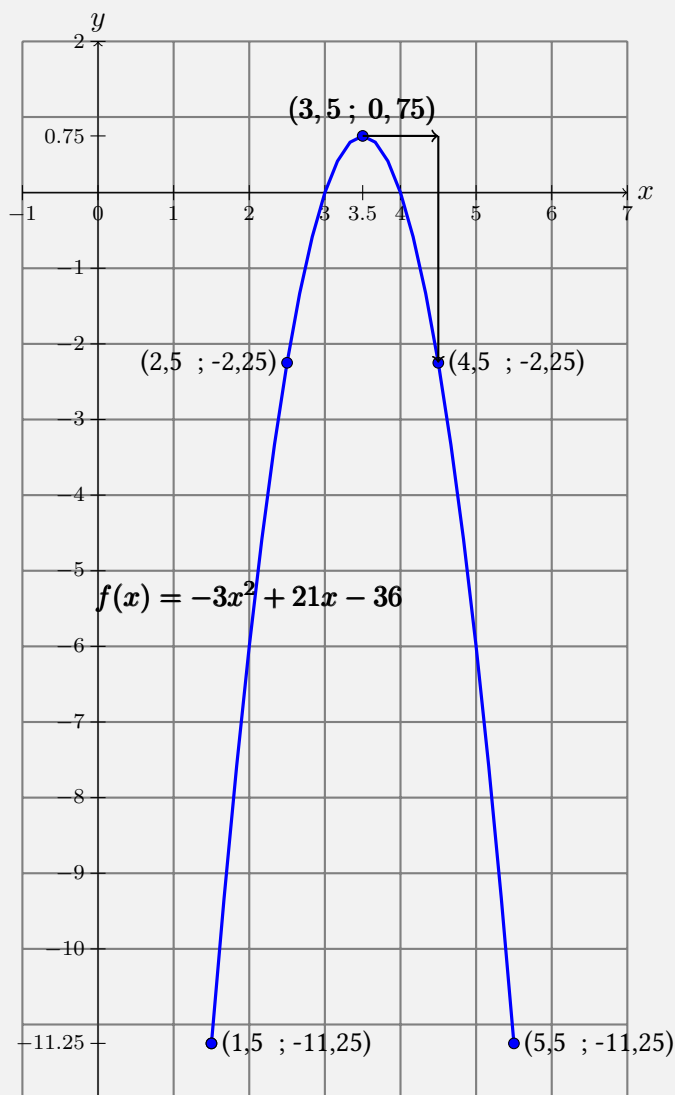
3. A $(3,5 ; 0,75)$ pontból egy egységnyit megyünk pozitív x-tengely (tehát jobbra) irányába, majd innen $-3 \cdot 1^2 = -3$ egységnyit az y-tengelyen (tehát lefelé). Így elérünk a $(4,5 ; -2,25)$

4. Ha a $(3,5 ; 0,75)$ pontból két egységnyit megyünk a pozitív x-tengely irányába (tehát jobbra), akkor onnan még $-3 \cdot 2^2 = -12$ egységet kell mennünk az y-tengelyen. Így megkapjuk az $(5,5 ; -11,25)$ pontot.

5. Ha a $(3,5 ; 0,75)$ pontból egy egységnyit megyünk a negatív x-tengely irányába (tehát balra), akkor onnan még $-3 \cdot (-1)^2 = -3$ egységet kell mennünk az y-tengelyen. Így megkapjuk a $(2,5 ; -2,25)$ pontot.

6. Ha a $(3,5 ; 0,75)$ pontból két egységnyit megyünk a negatív x-tengely irányába (tehát balra), akkor onnan még $-3 \cdot (-2)^2 = -12$ egységet kell mennünk az y-tengelyen. Így megkapjuk az $(1,5 ; -11,25)$ pontot.

Ennyi ponttal már megelégszünk. Ha a pontokat a megfelelő módon összekötjük, megkapjuk a kívánt grafikont.



Függvényvizsgálat:

- **Grafikon:** Lefelé nyitott parabola
- **Értelmezési tartomány:** minden valós szám x , képlettel: $x \in \mathbb{R}$
- **Értékkészlet:** $y \leq 0,75$
- **Zérushely:** $x_1 = 3$, $x_2 = 4$
- **Metszéspont az x-tengellyel:** $M_1 = (3; 0)$, $M_2 = (4, 0)$
- **Szélsőérték:** maximum $x = 3,5$ -nél
- **Maximumpont:** $Max = (3,5; 0,75)$
- **Paritás:** nincs
- **Menete:** $]-\infty; 3,5]$ szigorúan monoton nő $[3,5; \infty[$ szigorúan monoton csökken

Mindezen ismételés után definiáljuk a másodfokú függvény hozzárendelési szabályát :

Definíció 1.

A másodfokú függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ ahol } a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$$

2 A másodfokú egyenlet megoldóképlet

Definíció 2. (Másodfokú egyenlet)

A másodfokú egyenlet általános alakja:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ ahol } a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$$

A fenti definícióban okkal használtuk az "általános" jelzőt. Már a gyökvonás fejezetben találkoztunk egyszerűen megoldható másodfokú egyenletekkel.

Példa:

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$2x^2 = 338$$

Erre az egyenletecskére azt is mondhatnánk, hogy triviális¹. Először elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát kettővel, így a következőt kapjuk:

$$x^2 = 169 \quad | \sqrt{}$$

Ebből négyzetgyökvonás után megkapjuk az egyenlet megoldásait. Csak azt nem szabad elfelejtenünk, hogy ha pozitív számból négyzetgyököt vonunk, mindig két megoldásunk lesz, mint azt az előző fejezetben tanultuk:

$$x = \pm 13$$

$$\text{Tehát } x_1 = 13; x_2 = -13$$

¹Ha a matematikusok lusták valamit kiszámolni vagy bebizonyítani, sokszor előfordul, hogy egyszerűen azt mondják: Ez a feladat triviális, vagy egy másik feladathoz analóg módon kell megoldani

Természetesen ezt az egyenletet is felírhattuk volna általános alakban, ami a következőképpen:

$$2x^2 + 0x + 0 = 338$$

Ez természetesen teljesen felesleges, hiszen csak megnehezítjük vele a saját dolgunkat. A másodfokú függvények egy másik típusa a következő képpen írható fel:

$$ax^2 + bx = 0, \text{ ahol } a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0$$

Példa:

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$2x^2 - 6x = 0$$

A megoldás itt is rendkívül egyszerű- Először kiemelünk x -et:

$$x \cdot (2x - 6) = 0$$

Tudjuk, hogy egy szorzat akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha valamelyik tényezője egyenlő nullával. Ebből következik:

$$x = 0, (2x - 6) = 0$$

$$\text{Tehát } x_1 = 0 \text{ és } x_2 = 3$$

Megjegyzés: A fentihez hasonló típusú egyenletek megoldásánál szigorúan tilos a következőképpen eljárni:

$$\begin{array}{l} 2x^2 - 6x = 0 \quad | \quad + 6x \\ 2x^2 = 6x \quad | \quad : x \\ 2x = 6 \quad | \quad : 2 \\ x = 3 \end{array}$$

hiszen így egyértelműen elvesztünk egy megoldást tehát gyökvesztéssel állunk szemben.

Tétel 1. Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet valós gyökei/megoldásai meghatározhatóak az

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

képlet segítségével.

Bizonyítás.

1. Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet mindkét oldalát elosztjuk a -val:

$$\begin{array}{l} ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \end{array}$$

2. $\frac{c}{a}$ -t átvisszük az egyenlet jobb oldalára :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

3. mindkét oldalhoz hozzáadunk $(\frac{b}{2a})^2$ -t, hogy ezután egyszerűbb alakra hozhassuk:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

4. Az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ nevezetes azonosság alkalmazásával felírhatjuk az egyenletet a következő alakban:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

5. Elvégezzük a szükséges átalakításokat (*hatványozás, közös nevezőre hozás*):

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

6. Négyzetgyököt vonunk:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

7. x -re rendezzük az egyenletet :

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

8. A négyzetgyökvonás azonosságainak megfelelően átalakítjuk az egyenlet jobb oldalán álló kifejezést:

$$-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

9. Mivel $\sqrt{4a^2} = \sqrt{4}\sqrt{a^2} = 2a$, teljesül:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

□

2.1 Kidolgozott feladatok

1. Példa: Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$-3x^2 + 21x - 36 = 0$$

Most már tudjuk, hogy a másodfokú egyenletek megoldhatóak a megoldóképlet segítségével. Ennél azonban szükségünk van a képletben használt $a, b, c \in \mathbb{R}$ számokra. Jegyezzük meg a következőt: A megoldóképletben az a mindig az a szám, amely az x^2 előtt áll. A b a megoldóképletben az a szám, ami a "sima" x előtt áll és a c az a szám, ami x -nélkül áll. Ez a fenti példánkban a következőt jelenti:

$$\underbrace{-3}_a x^2 + \underbrace{21}_b x \underbrace{-36}_c = 0$$

Tehát $a = -3$, $b = 21$ és $c = -36$

Használjuk a megoldóképletet:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-36)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 432}}{-6} = \frac{-21 \pm \sqrt{9}}{-6} \\ &= \frac{-21 \pm 3}{-6} \Rightarrow x_1 = \frac{-21+3}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3, \quad x_2 = \frac{-21-3}{-6} = \frac{-24}{-6} = 4 \end{aligned}$$

Tehát az egyenletünk két gyöke: $x_1 = 3$ und $x_2 = 4$

2. Példa: Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

Ebből leolvashatjuk, hogy $a = 1$, $b = -6$ és $c = 9$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} \\ &= \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek szemmel láthatóan csak egy megoldása van, az $x = 3$.

3. Példa: Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$x^2 - 6x + 11 = 0$$

Ebből leolvashatjuk, hogy $a = 1$, $b = -6$ és $c = 11$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2 \cdot 1} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 44}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Mivel nem értelmezzük, ha a négyzetgyök alatt negatív szám van, ebben az esetben azt mondjuk, hogy az egyenletnek nincs valós megoldása.

Észre kellene vennünk, hogy a fenti példákban mindegyik egyenletnek különböző számú megoldása van. Fel kell tennünk magunkban a kérdést, hogy ez mivel hozható ez összefüggésbe. A rutinos megfigyelőknek feltűnhet, hogy az első példában, ahol a gyök alatt pozitív szám áll, két megoldást kapunk. A második példában a gyök alatt nulla áll, itt csak egy megoldást kapunk és az utolsó példában negatív szám áll a négyzetgyökjel alatt, így nincs (valós) megoldásunk.

Aki ezt észre vette, az bátran érezheti magát vállon veregetve. A megoldások száma ugyanis teljesen attól függ, hogy milyen szám áll a négyzetgyökjel alatt. Itt az ideje, hogy ezt az észrevételünket matematikai formába öntsük:

Tétel 2. Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet ($a \neq 0$) megoldásainak száma, az

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

képletben szereplő, a négyzetgyökjel alatt lévő kifejezéstől ($b^2 - 4ac$) függ. A gyök alatti kifejezést **diszkriminánsnak** nevezzük és D -vel jelöljük.

1. Ha a diszkrimináns $D = b^2 - 4ac > 0$, az egyenletnek **két valós megoldása van**
2. Ha a diszkrimináns $D = b^2 - 4ac = 0$, az egyenletnek **egy valós megoldása van**
3. Ha a diszkrimináns $D = b^2 - 4ac < 0$, az egyenletnek **nincs valós megoldása**

3 A gyöktényezős alak

Itt az ideje, hogy megvizsgáljuk, milyen alakban írhatóak fel másodfokú egyenletek. Az előzőekben már megtanultuk, hogy egy szorzat akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha valamelyik tényezője egyenlő nullával. Ezt a tételt fogjuk felhasználni az egyenlet **gyöktényezős** alakjának meghatározásánál. A **gyöktényezős** elnevezés nagyon beszédes. A matematika nyelvén jártas olvasónál a tényező szó hallatán egyből villognak a vészharangok, hogy egy **szorzatra** kell gondolni. Mint azt tudjuk, a gyök szócska pedig az egyenlet megoldásait jelenti. Ez azt jelenti hogy egy olyan alakban próbáljuk felírni az egyenletünket, mely szorzat alakban van és az egyenlet megoldásaival hozható összefüggésbe. Legyenek az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek a megoldásai x_1 és x_2 . Ebben az esetben az egyenlet felírható úgyis, mint $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Ez azt jelenti, hogy teljesen mindegy, melyik alakját írom fel az egyenletnek, a végeredmény mindkét esetben teljesen ugyanaz.

A szkeptikusabb olvasó úgy gondolhatja, hogy ez csak egy légből kapott csacska ötlet, olyasfajta marhaság, pedig ez egyáltalán nem így van. Ennek belátása érdekében oldjunk meg a következő egyenletet:

$$6x^2 - 19x + 10 = 0.$$

$$a = 6, \quad b = -19, \quad c = 10$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \xRightarrow{\text{Behely.}} \quad x_{1,2} = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 10}}{2 \cdot 6} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{+19 \pm \sqrt{361 - 240}}{12}$$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{121}}{12} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{19 \pm 11}{12}$$

$$x_1 = \frac{19+11}{12} = \frac{30}{12} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{19-11}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Most hogy ismerjük az egyenlet megoldásait megpróbálhatjuk meg az egyenletet a fenti $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ képletnek megfelelően átírni:

Ha a képletbe behelyettesítünk és elvégezzük a szorzásokat, a kezdeti egyenletet kellene megkapnunk:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= 0 \iff 6 \cdot (x - \frac{5}{2})(x - \frac{2}{3}) \\ 6 \cdot (x - \frac{5}{2})(x - \frac{2}{3}) &= 6 \cdot (x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{2}x + \frac{10}{6}) = 6 \cdot (x^2 - \frac{19}{6}x + \frac{10}{6}) = 6x^2 - 19x + 10 \end{aligned}$$

Definíció 3. (Gyöktényezős alak)

Az

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

egyenletet az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet **gyöktényezős alakjának** nevezzük. A képletben az x_1 , x_2 az egyenlet valós gyökeit jelölik.

Most megvizsgáljuk, milyen összefüggés van az egyenlet gyökei / megoldásai és az együtthati között:

Tételezzük fel, hogy az egyenletünknek van két valós megoldása. Jelölje

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

az egyenlet egyik valós megoldását és

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a másikat.

Nézzük meg mi történik, ha a két megoldás gyökét képezzük:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) + (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \underline{\underline{-\frac{b}{a}}} \end{aligned}$$

Ez az eredmény legtöbbünk számára meglepő lehet. Két bonyolultnak tűnő kifejezés összeadásával egy ilyen rendkívül egyszerű kifejezést kaptunk.

Most vizsgáljuk meg, mi történik, ha a két megoldásnak a szorzatát képezzük:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) \cdot (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \underline{\underline{\frac{c}{a}}} \\ &\quad \underbrace{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}_{\text{nev. azon.}} \end{aligned}$$

Újfent felfedeztünk egy érdekes összefüggés a másodfokú egyenlet együtthatói és gyökei között.

Az első, aki ezeket az összefüggéseket vizsgálta **Francois Viète (1540-1603)** francia matematikus volt. Ezért azeket a fent levezetett formulákat róla nevezték el.

Definíció 4. (Viéte formulák)

Jelölje x_1 és x_2 az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldásait. Ilyenkor az egyenlet megoldásai/gyökei és együtthatói között fennállnak a következő összefüggések:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ezeket az összefüggéseket **Viéte-formuláknak** nevezzük.

Példa:

Írjunk fel olyan egyenletet, melynek gyökei $x_1 = -3$ és $x_2 = 5$

Ebben a feladatban mindösszesen az egyenlet gyöktényezős alakjára van szükségünk. Annál pedig mi szem egyszerűbb:

$$(x - (-3)) \cdot (x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x + 3) \cdot (x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2 + 3x - 5x - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Ellelnőrzésként csak meg kell oldanunk ezt az egyenletet :

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$a = 1, b = -2, c = -15$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = \underline{\underline{5}} \text{ és } x_2 = \frac{2-8}{2} = \frac{-6}{2} = \underline{\underline{-3}}$$

Mind az t láthatjuk, tényleg helyesen számoltunk, hiszen az egyenletük gyökei pontosan azok, amiket a feladat előírt.