

Bevezetés a síkgeometriába

Keszeg Attila

2016.01.29.

1 Bevezetés

- Fogalom, alapfogalom
- Állítás,axióma
- Térelemek kölcsönös helyzete

2 Alapvető geometriai foglamlak

- A szögek
- A szögek mérése
- Szögfajták
- Szögpárok

3 A távolság

4 Háromszögek, négyszögek, sokszögek

- Háromszögek
- Pitagorasz- tétel
- Négyszögek
- Nevezetes négyszögek tulajdonságai
- sokszögek

Az ókori Görögországban a földmérés tudományát geometriának nevezték. Ma a matematika egyik szakterületét jelenti elsősorban. Már az ókori kínaiaktól, a babilóniaiaktól, az egyiptomiaktól is maradtak fenn geometria feladatok, ismeretek, de a matematika ezen ágát a nagy ókori görög matematikusok tették "önálló" tudománnyá.

Melyik a kakukktojás az alábbiak közül?

Pont, egyenes, sík, szakasz, vonal, felület, tér

Első ránézésre a legtöbben azt mondanák, hogy a szakasz.

De miért?

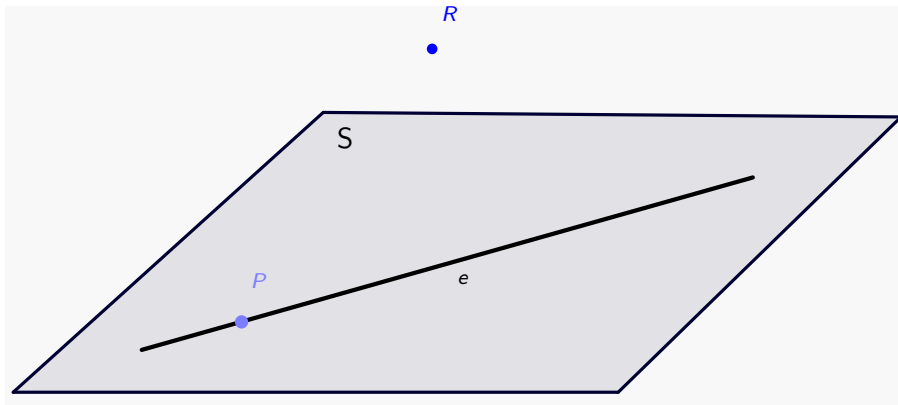
A fent soroltak közül egyedül a szakasz fogalmát lehet meghatározni.

A **szakasz** az **egyenesnek két pont által határolt része**.Annak meghatározása, hogy mi a pont, az egyenes, a vonal, a sík, a felület, a tér, vagy hogy mit értünk illeszkedésen az elmúlt évezredekben lehetetlennek bizonyult. Lehet rájuk olyanokat mondani, hogy: a pont olyan, mint a tű hegye, és így tovább, de ezek nem meghatározások, csak hasonlatok.

A geometria azokat a fogalmakat, amelyeket definiálni nem tud, de a körülöttünk lévő világból absztrakció útján mégis megalkot és használ, alapfogalmaknak nevezi. Az alapfogalmakból kiindulva már lehetséges pontos definíciókat kreálni (*pl.: szakasz*)

A **pont**, az **egyenes**, a **sík** és az **illeszkedés** alapfogalmak, így ezeket nem definiáljuk.

Vizsgáljuk meg a következő ábrát!



- 1 Az e egyenes illeszkedik az S síkra
- 2 Az P pont illeszkedik az e egyenesre

A geometriában a fogalmakkal kapcsolatban állításokat fogalmazunk meg.

Például:

- 1 A derékszögű háromszög befogóira emelt négyzetek területeinek összege egyenlő az átfogóra emelt négyzet területével. **(Pitagorasz tétele)**
- 2 Ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk. **(Thalész tétele)**
- 3 Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor szemközti szögeinek összege 180° . **(Húrnégyszögek tétele 1.)**

A matematika minden állítást bizonyítani szeretnénk. De már az ókor óta tény, hogy a legegyszerűbb állításokat már nem lehet bizonyítani. Az ilyen alapvető , és bizonyítás nélkül igaznak tekintett állításokat **axiómáknak** nevezzük.

Az első matematikus, aki megpróbálkozott az alapállítások és alapfogalmak rendszerezésével, az ókori görög matematikus **Eukleidész** volt. Az általa felállított axiómák közül az egyik legismertebb a **párhuzamossági axióma**, mely a következőt mondja ki:

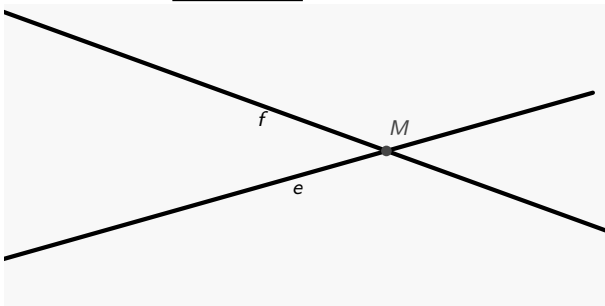
Ha két egyenes egy harmadikat metsz, akkor azok - eléggé meghosszabbítva - a metszőnek azon az oldalán találkoznak, amelyen a belső szögek összege kisebb két derékszögnél.

A fenti párhuzamossági axióma sok fejtörést okozott a matematikusoknak majd 2000 éven . Első sorban bonyolultsága és ellenőrizhetetlensége miatt. Ez indította el az axiómarendszerekre vonatkozó vizsgálatokat. Később ezekből a kutatásokból, illetve a párhuzamossági axióma tagadásából született meg a **Bolyai-Lobacsevszkij** féle geometria.

Két egyenes **metsző** ha van közös pontjuk

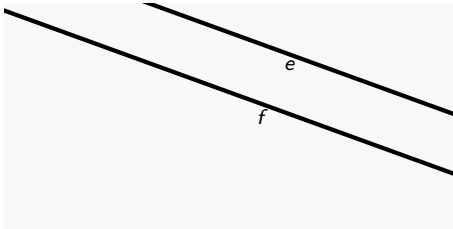
Az ***e*** és ***f*** egyenesek metszéspontja az ***M*** pont

Képlettel: $e \cap f = M$



Két egyenes **párhuzamos** ha egy síkban
vannak és nincs közös pontjuk

Képlettel: $e \cap f = \emptyset \quad (e \parallel f)$



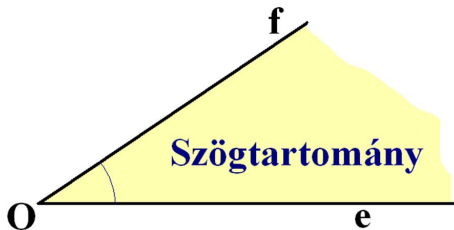
- ① Minden egyenes párhuzamos önmagával
- ② Két egyenes **kitérő**, ha nincsenek egy síkban
- ③ Két sík **metező** ha pontosan egy közös egyenesük van
- ④ Két sík **párhuzamos**, ha nincs közös pontjuk
Egy egyenes **illeszkedik** egy síkra, ha az egyenes minden pontja, pontja a síknak is
- ⑤ Egy egyenes **metez** egy síkot, ha pontosan egy közös pontjuk van
- ⑥ Egy egyenes és egy sík **párhuzamosak** ha nincs közös pontjuk

A sík illeszkedési axiómái

- 1 Két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- 2 Ha három különböző pont nem illeszkedik egy egyenesre, akkor a három pontra pontosan egy sík illeszkedik.
- 3 Ha egy egyenes két különböző pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes minden pontja illeszkedik a síkra.
- 4 Egy egyenesre és egy rá nem illeszkedő pontra pontosan egy sík illeszkedik.
- 5 Egy adott pontra pontosan egy olyan egyenes illeszkedik, amely párhuzamos egy adott egyenessel.

- 1 Egy egyenest egy pontja két félegyenesre bontja
- 2 Egy egyenes két pontja meghatároz egy szakaszt
- 3 Egy síkot egy egyenes két félsíkra bont
- 4 Egy teret egy sík két féltérre bont

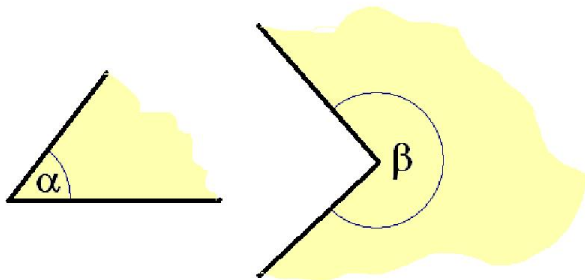
Két, közös kezdőpontú félegyenes a rájuk illeszkedő síkot két részre vágja. Az így kapott síkrészeket szögtartományoknak nevezzük. A közös kezdőpont a szög csúcsa (**O**), a félegyenesek a szög szárai (**e**, **f**), a köztük lévő rész a szög tartomány.



A szögek jelölésére a görög betűket használjuk:

Görög ÁBC	Magyar Karakter	Kisbetű Sym bol	Nagybetű Symbol
Alfa	A	α	A
Béta	B	β	B
Gamma	G	γ	Γ
Delta	D	δ	Δ
Epsilon	E	ϵ	E
Zéta	Z	ζ	Z
Éta	H	η	H
Théta	Q	θ	Θ
Iota	I	ι	I
Kappa	K	κ	K
Lambda	L	λ	Λ
Mú	M	μ	M

Görög ÁBC	Magyar Karakter	Kisbetű Sym bol	Nagybetű Symbol
Nú	N	ν	N
Kszi	X	ξ	Ξ
Omikron	O	$\omicron$	O
Pi	P	π	Π
Rhó	R	ρ	P
Sigma	S	σ	Σ
Tau	T	τ	T
Üpsilon	U	υ	Y
Fi	F	ϕ	Φ
Chi	C	χ	X
Pszi	Y	ψ	Ψ
Ómega	W	ω	Ω



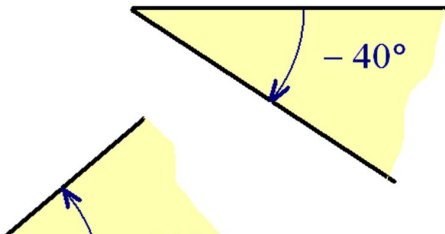
Szögek mérése

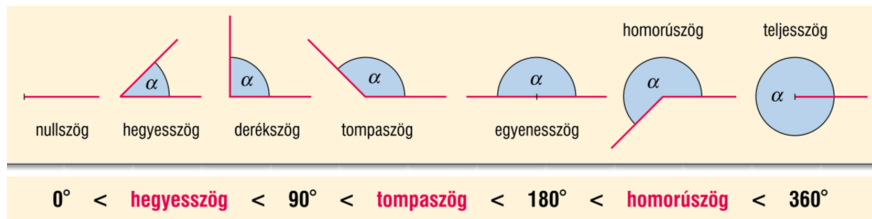
- 1 A szögeket általában fokban mérjük.
- 2 A szög fokban történő mérésének egysége az
- 3 1° (egy fok), ami a teljes szög 360-ad része
- 4 A fok hatvanadrésze **$1'$ (1 szögperc)**, a perc hatvanadrésze pedig az **$1''$ (1 szögmásodperc)**

Szögek irányítása

Az irányított szög két szárát megkülönböztetjük egymástól, az egyiket kiinduló szárnak tekintjük.

Ha a szög kiinduló szárát az óramutató járásával ellentétes irányban lehet átfordítani a másik szárba, akkor az irány pozitív, ellenkező esetben negatív.





Azokat az α szögeket, melyekre $0^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ teljesül **konvex** (=domború) szögeknek nevezzük.

Azokat az α szögeket, melyekre $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ teljesül **konkáv** (=homorú) szögeknek nevezzük.

Név:	Nagyság:
Nullszög	$\alpha = 0^\circ$
Hegyesszög	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$
Derékszög	$\alpha = 90^\circ$
Tompaszög	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
Egyenesszög	$\alpha = 180^\circ$
Homorú szög	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$
Teljesszög	$\alpha = 360^\circ$

Egyállású szögek

Két konvex vagy két konkáv szög szárai páronként párhuzamosak és azonos irányba mutatnak. Az egyállású szögek egyenlő nagyságúak.



Váltószögek

Két konvex vagy két konkáv szög szárai páronként párhuzamosak és ellentétes irányba mutatnak.

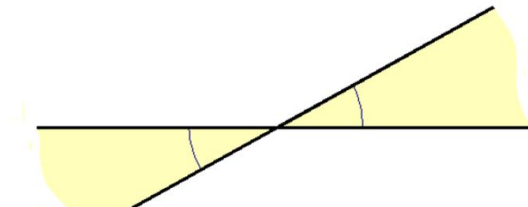
Az egyállású szögek egyenlő nagyságúak.



Csúcsszögek

Csúcsaik egybeesnek és száraik páronként egy-egy egyenest alkotnak.

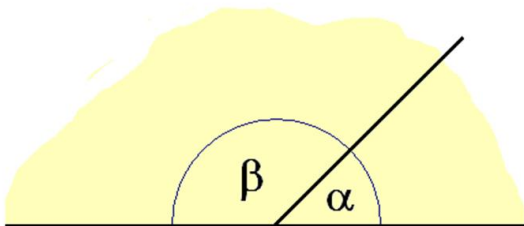
A csúcsszögek egyenlő nagyságúak.



Mellékszögek

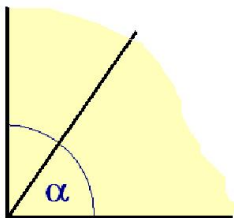
Csúcsaik egybeesnek, egy-egy száruk egybeesik, másik két száruk egy egyenest alkot.

A mellékszögek egymást egyenesszögre egészítik ki.

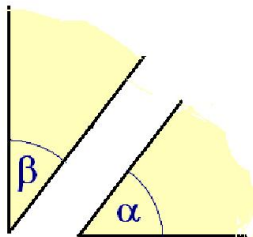


Pótszögek

Azok a szögpárok, melyeknek az összege 90°



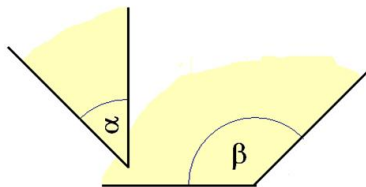
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



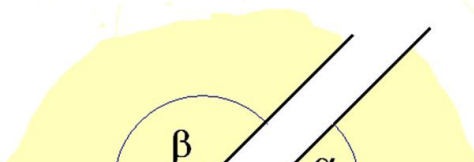
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Kiegészítő szögek

Azok a szögpárok, melyeknek az összege 180°



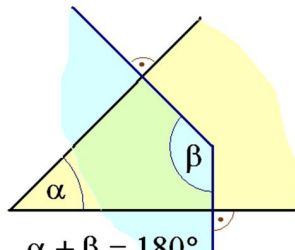
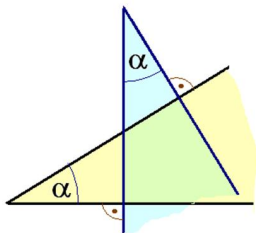
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



Merőleges szárú szögek

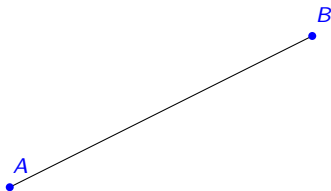
Száraik páronként merőlegesek egymásra

Nagyságuk egyenlő, vagy egymást 180° -ra egészítik ki



A távolság fogalma

A távolság fogalma szorosan kötődik a mérés, és így az egység fogalmához. Egy adott szakaszt egységnyi hosszúságúnak tekinthetünk. A hétköznapi életben nagyon sok, különböző mértékeységet használunk távolságok meghatározására (méter, yard, könyök, stb.).



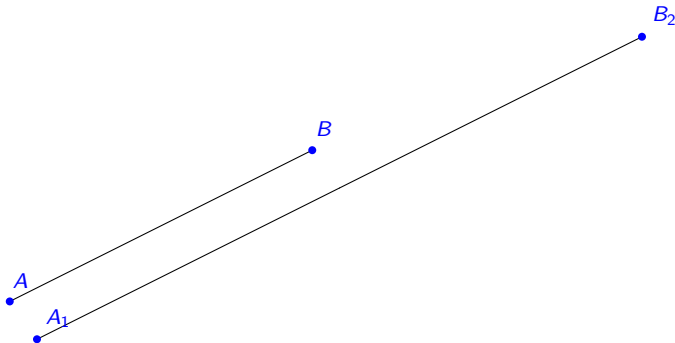
Legyen a mellékelt ábrán az A és B pontok távolsága egységnyi, azaz AB szakasz hossza 1 !

$$d(A; B) = 1$$

A lenti ábrán az A_1 és B_1 pontok távolsága 2

Képlettel: $d(A_1; B_1) = 2$,

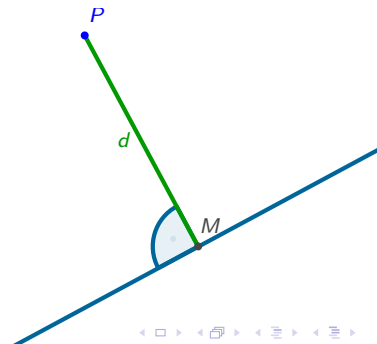
hiszen az AB szakasz pontosan kétszer mérhető rá.



Pontnak egyenestől való távolságán annak a szakasznak a hosszát értjük, amely a pontból az egyenesre bocsátott merőlegesen a pont és az egyenes között van

Képlettel:

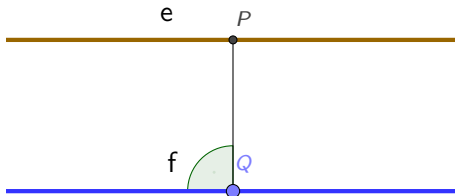
$$d(P; e) = d(P; M)$$



Két párhuzamos egyenes távolsága az egyik egyenes egy tetszőleges pontjának a másik egyenestől vett távolsága.

Képlettel:

$$d(e; f) = d(P, f) = d(Q; e) = d(P; Q)$$



Két metsző egyenes távolsága 0

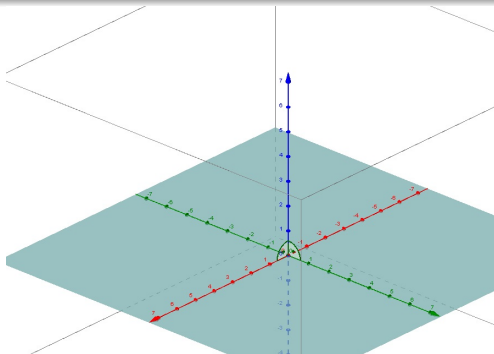
Definíció: Egy egyenes merőleges egy síkra, ha a sík minden egyenesére merőleges

Pont és sík távolsága a pontból a síkra bocsátott merőleges talppontjának és a tekintett pontnak a távolsága

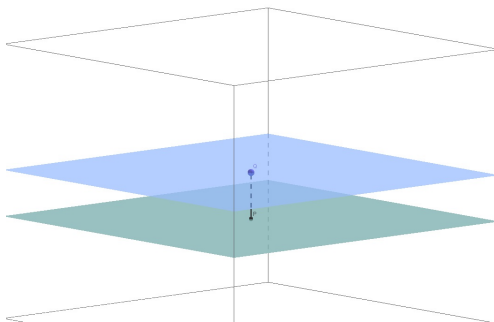
Definíció:Két kitérő egyenes merőleges egymásra, ha az egyik egyenes,ha az egyik egyenes és annak tetszőleges pontjára illeszkedő, a másik egyenessel párhuzamos egyenes merőlegesek egymásra

Tétel

Ha egy egyenes merőleges a síkkal vett metszéspontjára illeszkedő két különböző síkbeli egyenesre, akkor az egyenes merőleges a síkra.



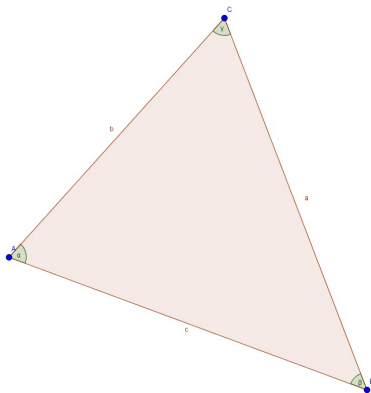
Két párhuzamos sík távolsága az egyik sík tetszőleges pontjának, a másik síktól vett távolsága.



Megjegyzés: A távolság fogalma az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- 1 Egymásra illeszkedő pontok távolsága nulla. Azaz, ha $A = B$, akkor $d(A; B) = 0$
- 2 Szimmetria tulajdonság: $d(A; B) = d(B; A)$
- 3 Három pont esetén teljesül az úgynevezett háromszög egyenlőtlenség: $d(A; B) + d(B; C) \geq d(A; C)$

A háromszögek alapadatait a következő módon jelöljük :



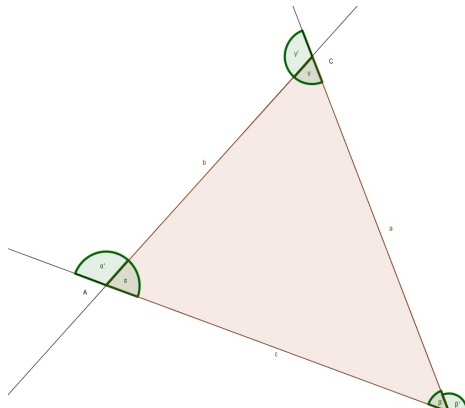
- ① **A hegyesszögű** háromszög mindhárom belső szöge hegyesszög
- ② **A derékszögű** háromszög egyik szöge derékszög
- ③ **A tompaszögű** háromszög egyik szöge tompaszög

Tétel

A háromszög belső szögeinek összege 180°

Tétel

**Egy háromszög bármely belső szögének és a hozzá tartozó
külső szögének összege 180°**



Tétel

Egy háromszög bármelyik külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos két belső szög összegével

Feladat

Egy háromszög két belső szögének aránya $4 : 9$. A háromszög harmadik belső szöge $\frac{1}{18}$ egyenesszöggel nagyobb a másik két szög közül a kisebbiknél. Számítsuk ki a háromszög belső szögeit!

Kidolgozás

Próbáljuk meg értelmezni a feladatot! Az $\frac{1}{18}$ egyenesszög azt jelenti, hogy $\frac{1}{18} \cdot 180^\circ$, tehát 10° , mivel az egyenesszög 180° -os. Az hogy két szög $4 : 9$ arányban aránylanak egymáshoz, felírhatjuk a következőt:

Az egyik szög $4x$ a másik pedig $9x$ nagyságú.

Ezek közül egyértelmű, hogy a $4x$ nagyságú szög a kisebbik. Mivel a harmadik szög ennél 10° -kal nagyobb, és a belső szögek összege 180° , felírhatjuk a következőt:

$$4x + 9x + 4x + 10^\circ = 180^\circ$$

$$17x + 10^\circ = 180^\circ$$

$$17x = 170^\circ$$

$$x = 10^\circ$$

A háromszög egyenlőtlenség

Szabály

A háromszög oldalainak hosszára nézve teljesül, hogy bármely két oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál

Képlettel:

$$a + b > c \ ; \ a + c > b \ ; \ b + c > a$$

Feladat

Létezik olyan háromszög, melyben az oldalhosszak aránya $3 : 6 : 7$?

Kidolgozás

Mivel az oldalak $3 : 6 : 7$ arányban aránylanak egymáshoz felírhatjuk a következőt:

$$\underbrace{3x}_{a \text{ oldal}} ; \underbrace{6x}_{b \text{ oldal}} ; \underbrace{7x}_{c \text{ oldal}}$$

$$a + b = 3x + 6x = 9x > 7x = c \Rightarrow \text{lehetséges}$$

$$a + c = 3x + 7x = 10x > 6x = b \Rightarrow \text{lehetséges}$$

$$b + c = 6x + 7x = 13x > 3x = a \Rightarrow \text{lehetséges}$$

Tehát létezik ilyen háromszög

Egy háromszög **egyenlő szárú**, ha van **két egyenlő oldala**. E két egyenlő oldalt **száraknak**, a harmadik oldalt **alapnak** nevezzük. A szárak által bezárt szöget **szárszögnek**, az alapon nyugvókat **alapszögeknek** nevezzük.

Egy háromszög akkor és csak akkor egyenlő szárú, ha

- 1 van két egyenlő szöge;
- 2 tengelyesen szimmetrikus;
- 3 az egyik csúcsa illeszkedik a szemközti oldal felezőmerőlegesére
- 4 egyik magassága felezi a hozzá tartozó oldalt;
- 5 egyik magassága egyben szögfelező is.

- ① Egy háromszög **szabályos**, (*egyenlő oldalú*) ha minden oldala egyenlő
- ② Az ***a*** oldalú szabályos háromszög
 - ① magassága ***m*** = $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
 - ② területe ***t*** = $a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

Egy háromszög **egyértelműen** meghatározott , ha adott :

- 1 három oldala
- 2 Két oldala és a közbezárt szöge
- 3 Egy oldala és a rajta fekvő két szöge
- 4 két oldala és a nagyobb oldallal szemközti szöge

Tétel

A háromszögben egyenlő hosszúságú oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak

Tétel

Ha egy háromszög két szöge egyenlő, akkor az ezekkel szemközti oldalak is egyenlő hosszúak

Tétel

Bármely háromszögben két oldal közül a hosszabbikkal szemben nagyobb belső szög van, mint a rövidebbel szemben

Tétel

Bármely háromszögben két belső szög közül a hosszabbikkal szemben nagyobb belső szög van, mint a kisebbikkel szemben

A háromszög magasságai

- 1 A háromszög csúcsából a szemközti oldal egyenesére bocsájtott merőleges szakaszt magasságnak, a magasságra illeszkedő egyenest pedig magasságvonálnak nevezzük
- 2 A háromszög három magasságvonala egy ponton halad át
- 3 A háromszög magasságvonalaainak metszéspontját a háromszög magasságpontjának nevezzük.

A háromszög súlyvonalai

- 1 A háromszög egy csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt a háromszög súlyvonalának nevezzük
- 2 A háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át és ez a pont a súlyvonalak csúcstól távolabbi, az oldalhoz közelebb eső harmadolópontja
- 3 A háromszög súlyvonalainak metszéspontját a háromszög súlypontjának nevezzük

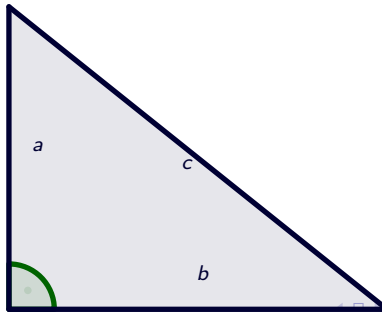
A háromszög középvonalai

- 1 A háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakaszt a háromszög középvonalának nevezzük
- 2 A háromszög két oldalának felezőpontját összekötő középvonala párhuzamos a háromszög harmadik oldalával, és hossza a harmadik oldal hosszának a fele

Pitagorasz- tétel

Tétel (Pitagorasz- tétel)

Derékszögű háromszögben a befogók hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának a négyzetével



Bevezetés
Alapvető geometriai foglamlak
A távolság
Háromszögek, négyszögek, sokszögek

Háromszögek
Pitagorasz- tétel
Négyszögek
Nevezetes négyszögek tulajdonságai
sokszögek
Átlók száma
Belső szögek összege

Bizonyítás

Pitagorasz- tétel

Tétel (Pitagorasz- tétel megfordítása)

Ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű

Tétel (Pitagorasz- tétel és megfordítása)

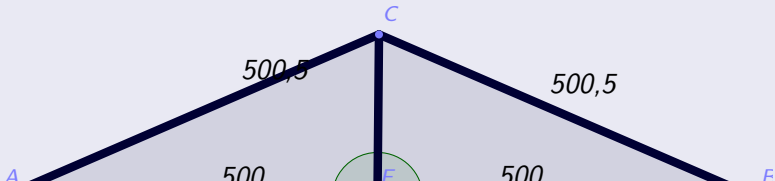
Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével

Feladat

Egy **1 km** hosszúságú egyenes két végpontjában rögzítjük egy **1001 m** hosszú kötél két végét. A kötél középpontját egy gép felemeli, amennyire csak lehet. Át tud-e menni alatta egy **180 cm** magas ember, anélkül hogy lehajolna?

Kidolgozás

Első lépésben elkészítünk egy vázlatot, hogy az segítsen a feladat megoldásában



Kidolgozás (Folytatás)

Egyértelműen látszik, hogy a keresett magsság az ábrán látható egyenlőszárú háromszöget két derékszögű háromszögre bontja fel. Ez azt jelenti, hogy a két ismert oldal és a Pitagorasz-tétel segítségével kiszámíthatjuk a magasságot.

Megjegyzés

Egy derékszögű háromszögben az átfogó mindig a derékszöggel szemben lévő oldal!

$$500^2 + m^2 = 500,5^2$$

$$m^2 = 500,5^2 - 500^2$$

$$m^2 = 250500,25 - 250000$$

$$m^2 = 500,25 \quad | \sqrt{}$$

- **Konvex** négyszög: minden szöge konvex
- **Konkáv** négyszög: ha van konkáv szöge

Nevezetes négyszögek

Trapézok	Olyan négyszögek, melyeknek van párhuzamos oldalpárja
Paralelogrammák	Olyan négyszögek, melyeknek szemkölti oldalai párhuzamosak
Rombuszok	Olyan négyszögek, melyeknek oldalai egyenlő hosszúak
Deltoidok	Olyan négyszögek, melyeknek két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú
Négyzetek	Olyan négyszögek, amelyeknek szögei és oldalai is egyenlők
Téglalapok	Olyan négyszögek, melyeknek egyenlők a szögei

Négyszögek osztályozása

Az oldalak párhuzamossága szerint 3 nagy csoportba sorolhatók a négyszögek:

- 1 Két-két párhuzamos oldaluk van. Ez a paralelogrammák családja. A téglalap, a rombusz és a négyzet is ide tartozik
- 2 Két párhuzamos oldaluk van. A trapézok családja, amelynek részhalmaza a paralelogrammák családja
- 3 Nincs párhuzamos oldaluk. A fent említett speciális négyszögek közül bizonyos deltoidok tartozhatnak ide

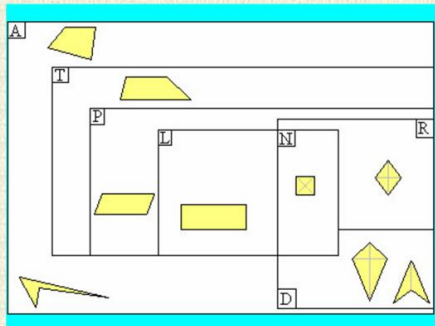
Négyszögek osztályozása

Az oldalak egyenlősége szerint 5 csoportba sorolhatók

- 1 Minden oldaluk egyenlő: rombuszok, és ezen belül a négyzetek.
- 2 Két-két szemközti oldaluk egyenlők. Ezek a paralelogrammák.
- 3 Szomszédos oldalaik egyenlők. Ezek a deltoidok. A deltoidok családjának részhalmaza a rombuszok és a négyzetek családja.
- 4 Két vagy három egyenlő oldala van. A speciális négyszögek közül csak a trapézok között fordulhat ilyen elő.
- 5 Nincs egyenlő oldaluk. Az általános négyszögeken kívül a trapéz lehet ilyen.

A mellékelt [halmazábrán](#) láthatók az egyes speciális négyszögek csoportosítva.

$A = \{\text{Általános négyszögek}\}$
 $T = \{\text{Trapézok}\}$
 $P = \{\text{Paralelogrammák}\}$
 $L = \{\text{Téglalapok}\}$
 $R = \{\text{Rombuszok}\}$
 $N = \{\text{Négyzetek}\}$
 $D = \{\text{Deltoidok}\}$

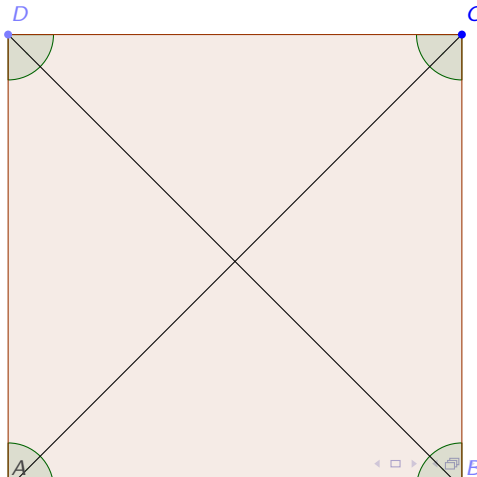


Az egyes halmazok között kapcsolatok tehát:

$P \subset T$; $L \subset P$; $R \subset P$; $N \subset L$; $N \subset R$; $R \subset D$; $N \subset D$. ($\subset$: valódi részhalmaz)

$L \cap R = N$ ($\cap$: [Halmazok metszete](#).)

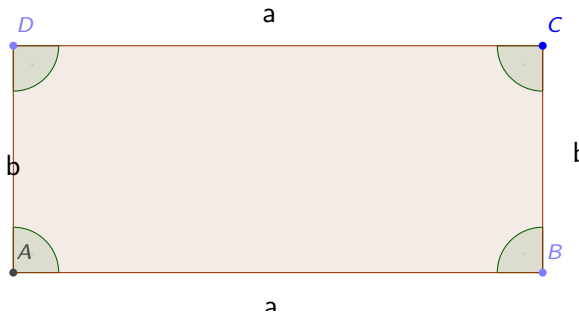
Négyzet



Négyzet

- 1 Szemközti oldalai párhuzamosak
- 2 Minden oldala egyenlő hosszúságú **a**
- 3 Minden szöge egyenlő nagyságú (**90°**)
- 4 Átlói egyenlő hosszúak
- 5 Átlói merőlegesen felezik egymást
- 6 Az átlók felezik a szögeket
- 7 Tengelyesen szimmetrikus, tengelyei az átlói és az oldalfelező merőlegesei
- 8 Közepppontosan szimmetrikus, középpont az átlók metszéspontja
- 9 **Kerület:** $4 \cdot a$
- 10 **Terület:** a^2

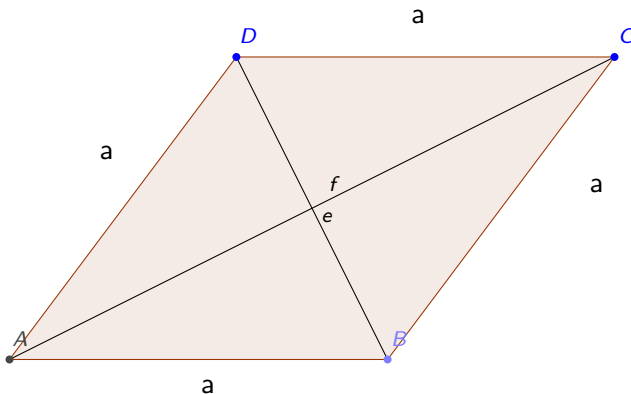
Téglalap



Téglalap

- 1 Szemközti oldalai párhuzamosak
- 2 Szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak
- 3 Minden szöge egyenlő nagyságú **90°**
- 4 Átlói egyenlő hosszúak
- 5 Átlói felezik egymást
- 6 Tengelyesen szimmetrikus, tengelyei az oldalfelező merőlegesei
- 7 Közepppontosan szimmetrikus, középpont az oldalfelező merőlegesek metszéspontja
- 8 **Kerület:** $2 \cdot (a + b)$
- 9 **Terület:** $a \cdot b$

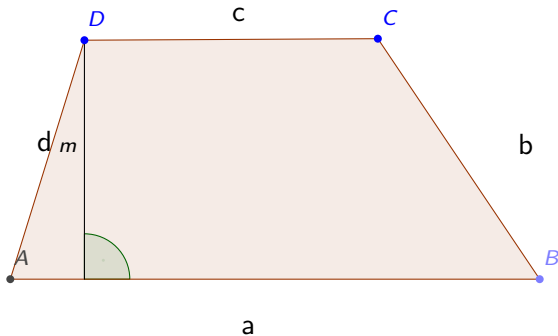
Rombusz



Rombusz

- 1 Szemközti oldalai párhuzamosak
- 2 Oldalai egyenlő hosszúságúak
- 3 Szemközti szögei egyenlő nagyságúak
- 4 Szomszédos szögei egymást **180°** -ra egészítik ki
- 5 Átlói merőlegesen felezik egymást
- 6 Tengelyesen szimmetrikus, tengelyei az átlói
- 7 Középpontosan szimmetrikus, középpont az átlók metszéspontja
- 8 **Kerület:** $4 \cdot a$
- 9 **Terület:** $\frac{e \cdot f}{2}$

Trapéz



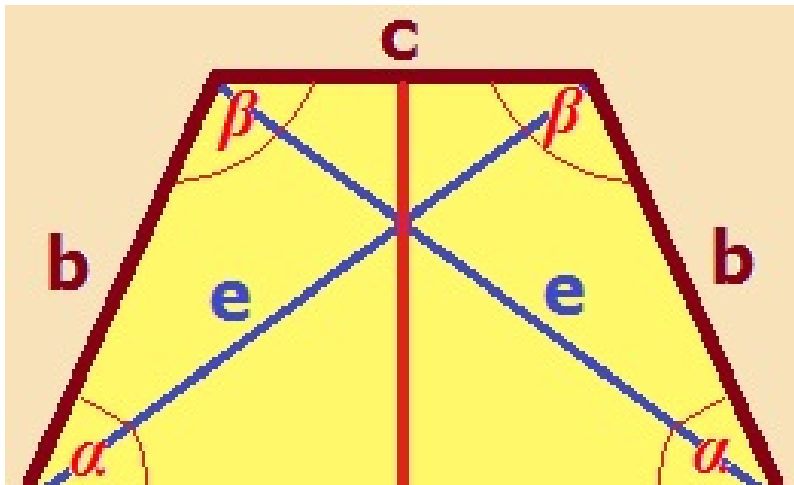
Trapéz

- 1 Van párhuzamos oldalpárja **(a, c)**
- 2 Párhuzamos oldalpár az alap, **(a, c)** a másik kettő a szár **(b, d)**
- 3 Az alapok távolsága a magasság **(m)**
- 4 A trapéz egy szárán fekvő két szögének összege **180°**
- 5 **Kerület:** $a + b + c + d$
- 6 **Terület:** $\frac{a+c}{2} \cdot m$

Bevezetés
Alapvető geometriai foglamak
A távolság
Háromszögek, négyszögek, sokszögek

Háromszögek
Pitagorasz- tétel
Négyszögek
Nevezetes négyszögek tulajdonságai
sokszögek
Átlók száma
Belső szögek összege

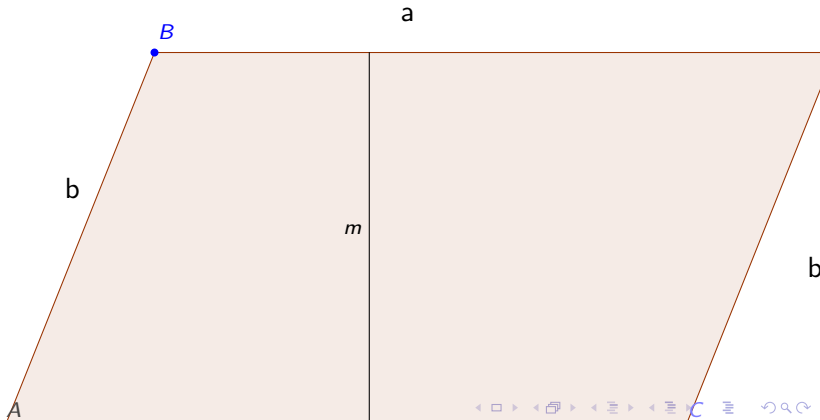
Húrtapéz



Húrtrapéz

- 1 Van párhuzamos oldalpárja
- 2 Párhuzamos oldalpár az alap, a másik kettő a szár
- 3 Szárai egyenlő hosszúak
- 4 Az alapok távolsága a magasság
- 5 A trapéz egy szárán fekvő két szögének összege **180°**
- 6 Egy alapon fekvő szögei egyenlők.
- 7 Átlói egyenlő hosszúak, és a szimmetriatengelyen metszik egymást

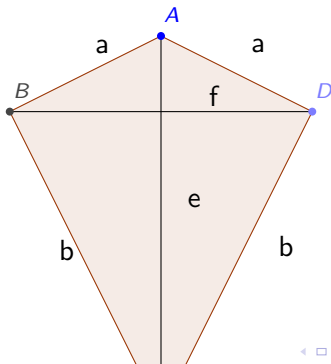
Paralelogramma



Paralelogramma

- 1 Szemközti oldalai párhuzamosak
- 2 Szemközti oldalai egyenlő hosszúak
- 3 Szemközti szögei egyenlők
- 4 Szomszédos szögeinek összege **180°**
- 5 Átlói felezik egymást
- 6 Közepponatosan szimmetrikus, középpontja az átlók metszéspontja
- 7 **Kerület:** $2 \cdot (a + b)$
- 8 **Terület:** $a \cdot m$

Deltoid

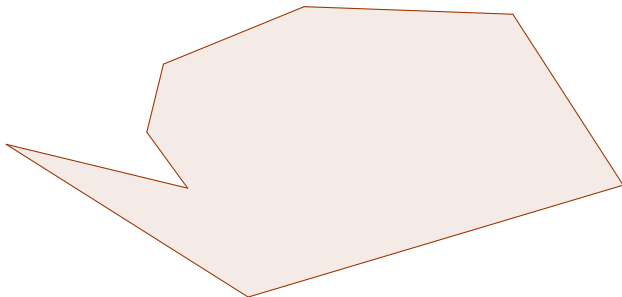


Deltoid

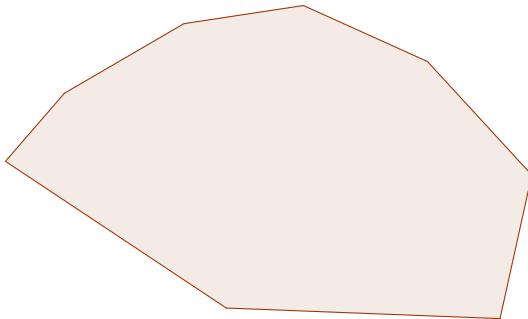
- 1 Két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú
- 2 Van két egyenlő szöge
- 3 Átlói merőlegesek egymásra
- 4 Átlói merőlegesek egymásra
- 5 Egy szimmetriatengelye van, amely az egyenlő oldalak által meghatározott csúcsokon halad keresztül
- 6 A szimmetriatengely felezi a másik átlót és a szögeket
- 7 **Kerület:** $2 \cdot (a + b)$
- 8 **Terület:** $\frac{e \cdot f}{2}$

- 1 Egy sokszög **konvex**, ha minden belső szöge konvex
- 2 Egy sokszög **konkáv** , ha van konkáv belső szöge

Konkáv sokszög

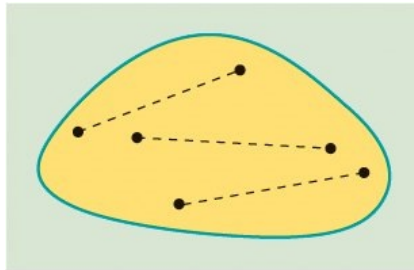


Konvex sokszög



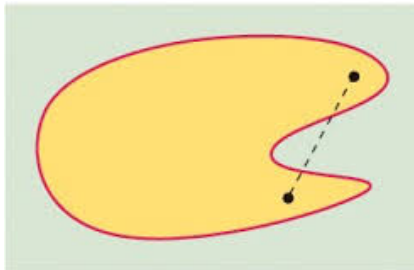
Definíció

Egy (síkbeli vagy térbeli) alakzat **konvex**, ha bármely két pontjával együtt a két pontot összekötő szakasz pontjai is az alakzathoz tartoznak.



Definíció

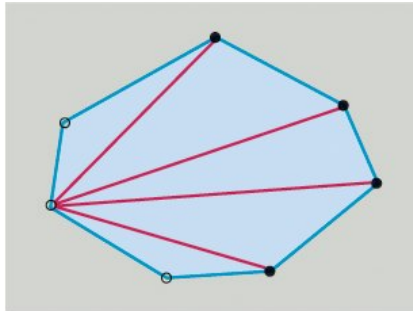
Egy (síkbeli vagy térbeli) alakzat konkáv, ha nem konvex, azaz van olyan – az alakzat két pontját összekötő szakasz, amelyik nem tartozik teljes egészében az alakzathoz.



Tétel

Az n -oldalú konvex sokszög átlóinak száma:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$$



Tétel

Az n -oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ$$

